UNIVERSITATEA DIN TIMIȘOARA
FACULTATEA DE ȘTIINȚE ALE NATURII

M. Craioveanu

LECȚII DE TOPOLOGIE

I

TIMIȘOARA
1979

Tipografia Universității din Timișoara

Scanned with OKEN Scanner

Profesorului Radu Miron,
Un omagiu de profundă recunoștință
pentru contribuția adusă la formarea mea matematică,
Craioveanu

UNIVERSITATEA DIN TIMIȘOARA
FACULTATEA DE ȘTIINȚE ALE NATURII

9.02.1980

M. Craioveanu

LECȚII DE TOPOLOGIE

I

TIMIȘOARA
1979

Tipografia Universității din Timișoara

Scanned with OKEN Scanner

I N T R O D U C E R E

Topologia este o abstractizare a geometriei. Ea operează cu mulţimi, avînd o structură ce permite definiţia continuităţii pentru aplicaţii şi un concept de "deschidere" pentru mulţimi. Această structură, numită "topologie" pe mulţime, a fost iniţial determinată din proprietăţile mulţimilor deschise din spaţiile euclidiene, în particular din planul euclidian.

Topologia generală a luat naştere ca o continuare firească a cercetărilor lui Georg Cantor din ultimele decenii ale veacului trecut (aproximativ 1880) privind teoria mulţimilor şi a primit impulsul iniţial prin introducerea spaţiilor metrice generale de către Maurice Fréchet în 1906 [13] şi prin apariţia cărţii lui Felix Hausdorff din 1912, "Grundzüge der Mengenlehre". De fapt primele noţiuni de topologie generală au fost introduse tot de Cantor: este vorba de conceptele fundamentale de punct limită, mulţime închisă, mulţime densă şi nicăieri densă pentru mulţimile concrete de pe axa reală (şi chiar din $\mathbb{R}^n$). De asemenea, tot lui Cantor îi datorăm introducerea mulţimii de pe axa reală care îi poartă numele (unii autori numesc această mulţime discontinuul lui Cantor; pentru detalii, v. [19], p.217). Menţionăm, de asemenea, că în memoriul din 1906, M.Fréchet a definit conceptele fundamentale de compacitate şi completitudine pentru spaţii metrice generale, iar în cartea sa F. Hausdorff a introdus spaţiile care-i poartă numele (v.5.1), a stabilit unele proprietăţi ale acestora şi a dovedit teorema fundamentală după care un spaţiu metric este compact dacă şi numai dacă este complet şi total mărginit (v. cap.III). Alte etape importante în dezvoltarea direcţiei

aşa-zise abstracte a topologiei sînt legate de numele lui René Baire, care a introdus spaţiile ce-i poartă astăzi numele (v.2.28) şi a dovedit teorema cunoscută sub acelaşi nume (v.3.47 şi 3.49), şi de cele ale matematicienilor P.S.Urysohn, P.S.Alexandrov, K. Kuratowski, W.Sierpinski, L.Vietoris, etc. care în perioada 1921-1925 au adus contribuţii fundamentale în problema metrizabilităţii spaţiilor topologice [v.şi 3.43, 5.64 şi 5.65,1)] . In legătură cu problema metrizabilităţii spaţiilor topologice cu bază numărabilă, P.S. Urysohn a definit noţiunea fundamentală de separaţie funcţională şi a dovedit lema ce-i poartă numele (v.5.35). Vom mai menţiona, în această scurtă perspectivă istorică relativ la dezvoltarea topologiei generale, că J.Dieudonné [11] a introdus în 1944 spaţiile paracompacte [v.5.65,2)] , iar în 1948, A. H. Stone a dovedit că orice spaţiu metric este paracompact [33].

Textul de faţă reprezintă versiunea dezvoltată a cursurilor de topologie generală pe care le-am prezentat ca o introducere în cadrul disciplinei de topologie algebrică. El a căpătat o asemenea amploare la solicitarea studenţilor ce au urmărit acest curs şi care au dorit un material - pe cît posibil - de sine stătător.

Abordînd punctul de vedere geometric în prezentarea topologiei, deci concepînd topologia ca teorie geometrică a continuităţii, intenţia mea a fost să ofer studenţilor un material care să constituie şi o punte naturală de trecere spre topologia algebrică, ceea ce era de fapt scopul cursului. Această punte s-a realizat prin intermediul proprietăţilor de conexiune şi conexiune prin arce, motiv ce explică plasarea studiului acestor concepte abia în finalul textului. Doresc să menţionez că am renunţat aproape complet la studiul proprietăţilor aşa-zise "locale" şi că preferinţa mea s-a îndreptat spre acele noţiuni şi rezultate de topologie ce au aplicaţii semnificative în geometrie şi într-o ca-

recare măsură şi în analiză. De asemenea, m-am străduit să ilustrez noţiunile cu exemple simple şi să fac legătura - în măsura în care acest lucru a fost posibil - cu concepte ce erau deja familiare studenţilor.

In final, doresc să mulţumesc colegilor mei Adrian C. Albu, Gheorghe Eckstein şi Mircea Puta pentru discuţiile utile purtate în timpul redactării textului de faţă, studenţilor mei Alexandra Florea, Lucian Cucu, Jozsef Laczko, Marius Lazăr, Nicolae Moga, Daniel Niccară, Claudiu Remsing, Eugen Stăvăroiu, Dan Ulmet, Adrian Vărgatu, Traian Viţelar şi Dan Zaharia pentru interesul arătat şi pregătirea materialului pentru multiplicare, precum şi colegului Constantin Giurescu pentru parcurgerea întregului manuscris şi observaţiile făcute.

Timişoara, mai 1979

MIRCEA CRAIOVEANU

Scanned with OKEN Scanner

C U P R I N S U L

INTRODUCERE

CAPITOLUL I: INTRODUCERE IN TEORIA NAIVA A MULTIMILOR 1
Mulţimi; submulţimi; algebra mulţimilor; produs cartezian; relaţii binare; tipuri particulare de relaţii binare; corespondenţe; aplicaţii; tipuri particulare de aplicaţii; imagine inversă; legătura dintre partiţii şi relaţii de echivalenţă; aplicaţii compatibile cu relaţii de echivalenţă; produs cartezian generalizat; axioma alegerii.

CAPITOLUL II: SPAŢII TOPOLOGICE SI APLICAŢII CONTINUE 29
Structuri topologice; imagini şi contraimagini de structuri topologice; operatorii topologici de interior şi de închidere; spaţii Baire; compararea topologiilor; bază pentru o topologie; aplicaţii continue; aplicaţii deschise şi închise; topologii cît; homeomorfisme; scufundări şi proiecţii topologice.

CAPITOLUL III: DOUA CLASE SPECIALE DE SPAŢII TOPOLOGICE: SPAŢII COMPACTE SI SPAŢII METRICE 80
Acoperiri, spaţii compacte; spaţii metrice.

CAPITOLUL IV: PRODUSE TOPOLOGICE DE SPAŢII TOPOLOGICE 110
Definiţia structurii topologice produs; proprietăţi ale topologiei produs; teorema lui Tihonov şi consecinţe.

CAPITOLUL V: AXIOME DE SEPARAŢIE SI APLICAŢII CONTINUE 132
Axiome de separaţie; axiome de separaţie şi aplicaţii continue; spaţii topologice complet regulate.

CAPITOLUL VI: SPAŢII TOPOLOGICE CONEXE SI SPAŢII TOPOLOGICE CONEXE PRIN ARCE 180
Spaţii topologice conexe; spaţii topologice conexe prin arce; algebrizarea chestiunilor referitoare la conexiune şi conexiune prin arce.

APENDICE: IDENTIFICĂRI SI LIPIRI 223

BIBLIOGRAFIE 231

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL I

INTRODUCERE IN TEORIA NAIVA A MULTIMILOR

Mulţimi. Submulţimi. Algebra mulţimilor.

Vom accepta ca primitive (nedefinite) conceptele de mulţime (colecţie, familie) de elemente şi conceptul ca un element să aparţină unei mulţimi.

In continuare vom nota cu litere mari mulţimile, cu litere mici elementele lor.

Dacă S este o mulţime şi x un element al său, vom scrie $x \in S$. Dacă x nu se află în mulţimea S, atunci vom scrie $x \notin S$.

Se admite existenţa unei mulţimi care nu are nici un element. Aceasta se numeşte mulţime vidă şi se notează cu simbolul $\emptyset$.

De asemenea, vom accepta că o mulţime este determinată de elementele sale. Prin urmare, două mulţimi sînt egale dacă şi numai dacă ele sînt formate din aceleaşi elemente (principiul de extensie). In cazul cînd două mulţimi A şi B sînt egale vom scrie: $A=B$. Dacă A şi B nu sînt egale vom scrie $A \neq B$.

In teoria naivă a mulţimilor se cere ca obiectele mulţimii să fie determinate. Se pune atunci problema modului de determinare a acestora. Un mijloc este acela de a enumera toate elementele mulţimii. Acest mijloc este însă neconvenabil în cazul mulţimilor finite cu un număr mare de elemente şi mai ales în cazul mulţimilor infinite. Din acest motiv se admite "principiul de abstracţie", adică fiecare proprietate defineşte o mulţime. Mulţimile definite în acest mod se vor nota prin

$$A = \{ x \mid P(x) \} ,$$

adică A constă din acele elemente x pentru care are loc proprietatea P(x).

Cu această ocazie atragem atenţia că folosirea fără restricţii a principiilor de extensie şi abstracţie duce la apariţia aşa zişelor antinomii din teoria mulţimilor.

Vom reaminti acum cîteva noţiuni şi proprietăţi relativ la algebra mulţimilor. Demonstraţia acestor proprietăţi este imediată, aşa încît o vom lăsa în seama cititorului.

1.1 Definiţie. Fie A şi B două mulţimi. Se zice că A este o submulţime a lui B (sau A este inclusă în B), dacă $\forall x \in A$, atunci $x \in B$. Dacă se întîmplă acest lucru vom nota $A \subseteq B$.

Simbolul $\subseteq$ are proprietăţile :

(1) $A \subseteq A$, pentru orice mulţime A (reflexivitate);

(2) Dacă A,B,C sînt mulţimi cu proprietăţile $A \subseteq B$ şi $B \subseteq C$, atunci $A \subseteq C$ (tranzitivitate);

(3) Dacă A şi B sînt mulţimi cu proprietăţile $A \subseteq B$ şi $B \subseteq A$, atunci $A = B$ (antisimetrie) şi reciproc;

(4) $\emptyset \subseteq A$, pentru orice mulţime A. In particular, mulţimea vidă $\emptyset$ este unică: dacă ar exista două mulţimi vide $\emptyset_1$ şi $\emptyset_2$, atunci $\emptyset_1 \subseteq \emptyset_2$ şi $\emptyset_2 \subseteq \emptyset_1$, deci conform proprietăţii (3), $\emptyset_1 = \emptyset_2$.

Se zice că mulţimea A este strict inclusă în B dacă $A \subseteq B$ şi $A \neq B$. Vom nota acest lucru prin $A \subset B$.

1.2 Definiţie. Dacă A şi B sînt două mulţimi, se numeşte uniunea (respectiv intersecţia) lor mulţimea notată că $A \cup B$ (respectiv $A \cap B$) şi definită astfel $A \cup B = \{ x \mid x \in A$ sau $x \in B$ sau ambele situaţii$\}$ (respectiv $A \cap B = \{ x \mid x \in A$ şi $x \in B \}$).

Similar, dacă $\mathcal{S}$ este o familie (colecţie) de mulţimi, u-

niunea şi intersecţia tuturor mulţimilor din $\mathcal{S}$ sînt definite respectiv prin

$$\bigcup_{S\in\mathcal{S}} S = \{x \mid (\exists S)(S\in\mathcal{S} \text{ şi } x\in S)\},$$

$$\bigcap_{S\in\mathcal{S}} S = \{x \mid (\forall S)(S\in\mathcal{S} \text{ şi } x\in S)\}$$

Observaţie. Dacă A şi B sînt două mulţimi atunci putem forma familia $\mathcal{S}=\{A,B\}$. Conform definiţiei de mai sus, $\bigcup_{S\in\mathcal{S}} S$ (respectiv $\bigcap_{S\in\mathcal{S}} S$) nu este altceva decît $A\cup B$ (respectiv $A\cap B$)

1.3 Definiţie. Dacă S este o mulţime şi $A\subset S$ o submulţime, atunci mulţimea

$$A' = \{ x \mid x\in S \text{ şi } x\notin A \}$$

se numeşte complementarea mulţimii A în raport cu S.

Pentru a nu crea pericol de confuzie, această mulţime se mai notează uneori şi cu $C_S(A)$.

1.4 Propoziţie . Fie A,B,C şi S mulţimi. Atunci

(1) $A\cup B=B\cup A$ (1') $A\cap B = B\cap A$ (comutativitate);

(2) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ (2') $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ (asociativitate)

(3) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ (3') $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ (distributivitate);

(4) $A\cup(A\cap B)=A$ (4') $A\cap(A\cup B) = A$ (absorbţie);

(5) $A\cup A = A$ (5') $A\cap A = A$ (idempotenţă) ;

(6) $A\cup\emptyset = A$ (6') $A\cap\emptyset = \emptyset$;

(7) Dacă $A\subset S$ şi $B\subset S$, atunci

$$\left.\begin{aligned}(A\cup B)' &= A'\cap B'\\ (A\cap B)' &= A'\cup B'\end{aligned}\right\}$$ formulele lui de Morgan;

(8) Dacă $A \subset S$, atunci $(A')' = A$;

(9) Dacă $\mathcal{S}_1$ și $\mathcal{S}_2$ sînt două familii (colecții) de mulțimi, atunci

$$\left(\bigcup_{S\in\mathcal{S}_1} S\right) \cup \left(\bigcup_{S\in\mathcal{S}_2} S\right) = \bigcup_{S\in\mathcal{S}_1\cup\mathcal{S}_2} S ,$$

$$\left(\bigcap_{S\in\mathcal{S}_1} S\right) \cap \left(\bigcap_{S\in\mathcal{S}_2} S\right) = \bigcap_{S\in\mathcal{S}_1\cup\mathcal{S}_2} S ,$$

$$\left(\bigcup_{S_1\in\mathcal{S}_1} S_1\right) \cap \left(\bigcup_{S_2\in\mathcal{S}_2} S\right) = \bigcup_{\substack{S_1\in\mathcal{S}_1 \\ S_2\in\mathcal{S}_2}} (S_1 \cap S_2).$$

(10) Dacă $\mathcal{S}$ este o familie de submulțimi a lui A, atunci

$$\left.\begin{aligned} \left(\bigcup_{S\in\mathcal{S}} S\right)' &= \bigcap_{S\in\mathcal{S}} S' \\ \left(\bigcap_{S\in\mathcal{S}} S\right)' &= \bigcup_{S\in\mathcal{S}} S' \end{aligned}\right\} \text{(formulele lui Morgan).}$$

Produs cartezian. Relații binare. Tipuri particulare de relații binare.

Să reamintim, mai departe, unele chestiuni în legătură cu conceptele de produs cartezian și relație binară.

1.5 Definiție. Fie a și b două elemente. Se numește pereche ordonată a elementelor a și b mulțimea notată cu (a,b) și definită prin :

$$(a,b) = \{\{a\}, \{a,b\}\} .$$

1.6 Propoziție. Dacă (a,b) și (c,d) sînt două perechi ordonate, atunci $(a,b)=(c,d)$ dacă și numai dacă $a=c$ și $b=d$.

Demonstrație. Dacă $a=c$ și $b=d$, atunci conform lui 1.5, $(a,b)=(c,d)$.

Scanned with OKEN Scanner

Reciproc, dacă presupunem că $(a,b)=(c,d)$, atunci în baza lui 1.5 putem scrie :

$$\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}.$$

Ultima egalitate implică următoarele patru posibilităţi:

(1) $\{a\}=\{c\}$ şi $\{a,b\}=\{c,d\}$;

(2) $\{a\}=\{c,d\}$ şi $\{a,b\}=\{c\}$;

(3) $\{a\}=\{c\}$ şi $\{a,b\}=\{c\}$ (în acest caz $\{a\}=\{a,b\}$ şi atunci în mod necesar $\{c\}=\{c,d\}$);

(4) $\{a\}=\{c,d\}$ şi $\{a,b\}=\{c,d\}$,

caz în care se repetă cele semnalate la (3).

In cazul (1) rezultă $a=c$ şi $b=d$ sau $a=b=c=d$. In fiecare din celelalte trei cazuri rezultă $a=b=c=d$.

Q. E. D.

1.7 Corolar Dacă a şi b sînt două elemente astfel încît $a \neq b$, atunci $(a,b) \neq (b,a)$.

Demonstraţie. Dacă presupunem, prin absurd, că $(a,b)=(b,a)$, atunci din 1.6 urmează că $a=b$, contradicţie.

Q. E. D.

1.8 Definiţie. Fie A şi B două mulţimi. Produsul cartezian al mulţimilor A şi B este mulţimea notată cu $A \times B$ şi definită astfel:

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ şi } b \in B\}.$$

Dacă A este o mulţime oarecare, mulţimea $\Delta_A = \{(a,a) \mid a \in A\} \subset A \times A$ se numeşte diagonală mulţimii $A \times A$.

Observaţie. Dacă A,B,C sînt trei mulţimi, vom defini produsul cartezian al celor trei mulţimi notat cu $A \times B \times C$ prin

egalitatea $A \times B \times C = (A \times B) \times C$. Elementul $((a,b),c)$ din mulţimea $A \times B \times C$ îl vom nota mai simplu (a,b,c). In acelaşi mod se procedează pentru a defini produsul cartezian a n mulţimi ($n > 3$).

1.9 Propoziţie. Fie A şi B două mulţimi. Atunci $A \times B \neq \emptyset$ dacă şi numai dacă $A \neq \emptyset$ şi $B \neq \emptyset$. In particular, $A \times B = \emptyset$ dacă şi numai dacă $A = \emptyset$ sau $B = \emptyset$.

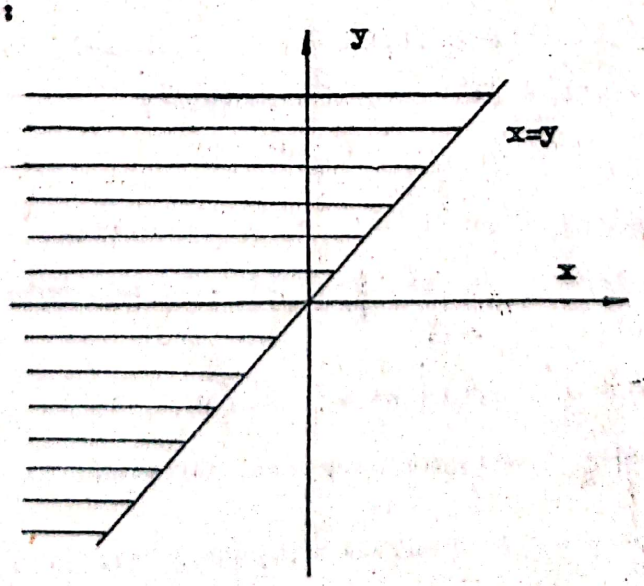
Demonstraţie. Dacă $A \neq \emptyset$ şi $B \neq \emptyset$, atunci există $a \in A$ şi $b \in B$ aşa încît $(a,b) \in A \times B$, deci $A \times B \neq \emptyset$. Reciproc, dacă $A \times B \neq \emptyset$, atunci există $(a,b) \in A \times B$, ceea ce implică $a \in A$ şi $b \in B$ şi deci $A \neq \emptyset$ şi $B \neq \emptyset$.

Q. E. D.

1.10 Definiţie. Fie A o mulţime. O relaţie binară pe mulţimea A este o submulţime R a produsului cartezian $A \times A$.

Dacă $a,b \in A$ şi $(a,b) \in R$ atunci se zice că a este în relaţia R cu b. Adesea în loc de $(a,b) \in R$ se scrie aRb.

Exemple. 1) Dacă $A = \mathbb{R}$ (=mulţimea numerelor reale), atunci $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ reprezintă planul obişnuit. Relaţia de ordine "$<$" este o relaţie binară pe $\mathbb{R}$, relaţie ce a fost haşurată în figura alăturată :



2) Δ_A(=diagonala mulţimii AxA) este o relaţie binară pe A, numită egalitate pe mulţimea A. In adevăr, dacă $a,b \in A$, atunci $a \Delta_A b$ este echivalent cu $a=b$.

3) Dacă R este o relaţie binară pe mulţimea A, atunci

$$R^{-1} = \{ (a,b) \mid (b,a) \in R \}$$

este de asemenea o relaţie binară pe A, numită inversa relaţiei binare R.

4) Dacă R, R_1 sînt două relaţii binare pe mulţimea A, atunci

$$R_1 \circ R = \{ (a,b) \mid (\exists c)(c \in A, (a,c) \in R \text{ şi } (c,b) \in R_1 \}$$

este o relaţie binară pe A, numită compunerea relaţiei binare R cu relaţia binară R_1.

1.11 Definiţie Fie A o mulţime şi $R \subseteq A \times A$ o relaţie binară pe A. Se zice că R este reflexivă (respectiv simetrică, respectiv antisimetrică, respectiv tranzitivă) dacă $\Delta_A \subseteq R$ (respectiv $R \subseteq R^{-1}$, respectiv $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A$, respectiv $R \circ R \subseteq R$). Se zice că R este totală dacă $A \times A = R \cup R^{-1}$.

Observaţie. Fie R o relaţie binară pe mulţimea A. Atunci

(1) R este reflexivă $\iff$ oricare ar fi $a \in A$, $(a,a) \in R$ (sau aRa)

(2) R este simetrică $\iff$ oricare ar fi $a,b \in A$ cu proprietatea $(a,b) \in R$, rezultă $(b,a) \in R$.

(3) R este antisimetrică $\iff$ oricare ar fi $a,b \in A$ cu proprietăţile $(a,b) \in R$ şi $(b,a) \in R$, rezultă că $a=b$.

(4) R este tranzitivă $\iff$ oricare ar fi $a,b,c \in A$ cu proprietăţile $(a,b) \in R$ şi $(b,c) \in R$, rezultă $(a,c) \in R$.

(5) R este totală $\iff$ oricare ar fi $a,b \in A$ trebuie să aibă loc sau $(a,b) \in R$ sau $(b,a) \in R$.

Corespondenţe. Aplicaţii. Tipuri particulare de aplicaţii.

1.12. Definiţie. Fie A şi B două mulţimi. Numim corespondentă de la mulţimea A la mulţimea B un triplet $\alpha=(A,\Gamma,B)$, unde Γ este o submulţime a lui AxB. Mulţimea Γ se numeşte graficul corespondenţei, iar A(respectiv B) se numeşte domeniul (respectiv codomeniul) corespondenţei.

Observaţie. Dacă $R\subseteq AxA$ este o relaţie binară pe mulţimea A, atunci tripletul $\alpha=(A,R,A)$ este o corespondenţă în sensul lui 1.12. Reciproc, dacă $\alpha=(A,R,A)$ este o corespondenţă de la A la A, atunci se poate asocia o relaţie binară pe A şi anume graficul R al lui α.

1.13 Definiţie. Fie $\alpha=(A,\Gamma,B)$ o corespondenţă avînd graficul Γ şi $X\subseteq A$ o submulţime a lui A. Mulţimea notată cu $\alpha(X)$ şi definită prin egalitatea

$$\alpha(X)=\{b\mid(\exists a)(a\in X \text{ şi } (a,b)\in\Gamma)\}$$

se numeşte imaginea directă a mulţimii X prin corespondenţa α.

In particular, dacă $X=\{a\}$, unde $a\in A$, atunci mulţimea $\alpha(\{a\})$ se va nota pe scurt $\alpha(a)$ şi se va numi imaginea elementului $a\in A$. Dacă $b\in B$ este un element astfel încît $b\in\alpha(a)$ atunci se zice că elementul b corespunde prin α elementului a, sau că lui a îi corespunde b.

Observaţii 1) Dată o corespondenţă $\alpha=(A,\Gamma,B)$ este posibil ca la un element a să corespundă mai multe elemente, eventual chiar o infinitate. De exemplu, în corespondenţa $\alpha=(\mathbb{R},\Gamma,\mathbb{R})$ unde $\Gamma=\{(\sin x,x)\mid x\in\mathbb{R}\}$ lui $0\in\mathbb{R}$ îi corespunde prin α mulţimea infinită $\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$, adică $\alpha(0)=\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$.

2) Pentru a defini o corespondentă este suficient a indica domeniul, codomeniul şi modul cum unui element oarecare din domeniu îi facem să-i corespundă un element din codomeniu.

1.14 Definiţie. O corespondenţă $f=(A,\Gamma,B)$ se va numi aplicaţie de la mulţimea A la mulţimea B, dacă mulţimea $\Gamma \subseteq A\times B$ satisface următoarele două proprietăţi:

(1) Pentru orice $a\in A$, există un element $b\in B$ astfel încît $(a,b)\in\Gamma$.

(2) Dacă (a,b) şi (a,b_1) sînt două perechi ordonate de elemente astfel încît $(a,b)\in\Gamma$ şi $(a,b_1)\in\Gamma$, atunci $b=b_1$.

Mulţimea A (respectiv B) se va numi domeniul de definiţie (respectiv codomeniul sau domeniul valorilor) al aplicaţiei f. Mulţimea Γ se va numi graficul aplicaţiei f.

1.15 Observaţii 1) Proprietatea (1) din 1.14 spune că aplicaţia f este "peste tot definită pe A", iar (2) că f este "uni-valuată".

2) Dacă $f=(A,\Gamma,B)$ este o aplicaţie şi $a\in A$ un element arbitrar, atunci din (1) rezultă că $f(a)\neq\emptyset$, iar din (2) că $f(a)$ este formată dintr-un singur element, adică $f(a)=\{b\}$, unde $b\in B$. De aici înainte vom conveni ca în loc de $f(a)=\{b\}$ să scriem $f(a)=b$. Cu această convenţie rezultă că $\Gamma=\{(a,f(a))\mid a\in A\}$. Din acest fapt rezultă că pentru a da pe Γ este suficient a indica proprietatea prin care elementului a i se asociază elementul $b=f(a)$.

3) Prin definiţie, două aplicaţii $f=(A,\Gamma,B)$ şi $f_1=(A_1,\Gamma_1,B_1)$ se zic egale, $f=f_1$, dacă $A=A_1$, $B=B_1$ şi $\Gamma=\Gamma_1$. In baza observaţiei precedente, $f=f_1$, dacă şi numai dacă $A=A_1$, $B=B_1$ şi $f(a)=f_1(a)$, oricare ar fi $a\in A$.

4) Dacă $f=(A,\Gamma,B)$ şi $g=(B,\Gamma_1,C)$ sînt două aplicaţii, atunci corespondenţa $g\circ f=(A,\Gamma_1\circ\Gamma,C)$ este o aplicaţie, unde $\Gamma_1\circ\Gamma=\{(a,c)\mid(\exists b)((a,b)\in\Gamma \text{ şi } (b,c)\in\Gamma_1)\}$. In adevăr, să verificăm că mulţimea $\Gamma_1\circ\Gamma$ verifică condiţiile (1) şi (2) din 1.14. Dacă $a\in A$, atunci există $b\in B$ astfel încît

$(a,b) \in \Gamma$, căci Γ verifică (1). Cum Γ_1 verifică (1), pentru elementul b există un element $c \in C$, astfel încît $(b,c) \in \Gamma_1$. Din apartenențele $(a,b) \in \Gamma$ și $(b,c) \in \Gamma_1$ rezultă $(a,c) \in \Gamma_1 \circ \Gamma$, adică $\Gamma_1 \circ \Gamma$ verifică (1) din 1.14. Fie acum $(a,c) \in \Gamma_1 \circ \Gamma$ și $(a,c_1) \in \Gamma_1 \circ \Gamma$. In baza definiției lui $\Gamma_1 \circ \Gamma$ există elementele $b, b_1 \in B$ astfel încît $(a,b) \in \Gamma$ și $(b,c) \in \Gamma_1$ pe de o parte, și $(a,b_1) \in \Gamma$ și $(b_1,c_1) \in \Gamma_1$ pe de altă parte. Deoarece Γ și Γ_1 verifică (2) din 1.14, rezultă că $b=b_1$ și deci $c=c_1$. Deci, mulțimea $\Gamma_1 \circ \Gamma$ verifică și (2) din 1.14.

In acest caz, dacă a este un element arbitrar din mulțimea A, atunci

$$(gof)(a) = g(f(a)),$$

egalitate ce este evidentă.

Aplicația gof definită mai sus, în ipoteza egalității dintre codomeniul lui f și domeniul lui g, se numește <u>compunerea aplicațiilor</u> f și g.

<u>Notație</u>. Pentru o aplicație oarecare $f=(A,\Gamma,B)$ vom folosi frecvent notațiile

$$f:A \longrightarrow B \qquad \text{sau} \qquad A \xrightarrow{f} B.$$

1.16 <u>Exemple</u>. 1) Dacă $X \subseteq A$ este o submulțime a lui A, atunci corespondența $i_{X,A}=(X,\Gamma,A)$, unde $\Gamma = \{(x,x) \mid x \in X\}$, este o aplicație numită aplicația de incluziune a mulțimii X în A. Cînd nu este pericol de confuzie, aplicația $i_{X,A}$ se notează $i:X \longrightarrow A$ sau mai simplu $X \subset A$. Dacă $x \in X$, atunci $i(x)=x$. Un exemplu simplu de aplicație de incluziune îl constituie aplicația identică a mulțimii $X: 1_X=(X,\Delta_X,X)$ (în acest caz $X=A$). Dacă $x \in X$ este clar că $1_X(x)=x$. Dacă $i:X \longrightarrow A$ este aplicația de incluziune, iar $f:A \longrightarrow B$ o aplicație oarecare, atunci compunerea lui i cu f este notată cu $f|_X : X \longrightarrow B$ și se

numeşte restricţia lui f la X. In acest caz, $f|_X(a)=f(a)$ pentru orice $a\in X$.

2) Fie X şi Y două mulţimi oarecare, astfel încît $Y\neq\emptyset$ şi fie $y_0\in Y$ un element fixat. Corespondenţa $f=(X, \Gamma_{y_0}, Y)$, unde $\Gamma_{y_0}=\{(x, y_0)\mid x\in X\}$, este o aplicaţie numită aplicaţia constantă asociată elementului y_0. Este clar că $f(x)=y_0$, oricare ar fi $x\in X$. Această aplicaţie poate fi definită şi drept compunerea aplicaţiei (unice) $f_0=(X, \Gamma_{y_0}, \{y_0\})$ cu aplicaţia de incluziune $\{y_0\}\subset Y$.

3) Fie X,Y două mulţimi. Corespondenţa p_X (respectiv p_Y, de la mulţimea $X\times Y$ la mulţimea X (respectiv Y) care asociază perechii $(x,y)\in X\times Y$ elementul x (respectiv y) este o aplicaţie. Aplicaţiile p_X, p_Y se numesc proiecţiile canonice ale produsului cartezian $X\times Y$. Uneori, cînd nu este pericol de confuzie, acestea se mai notează cu p_1 şi p_2. Se convine să se noteze $p_X((x,y))$ (respectiv $p_Y((x,y))$), cu $p_X(x,y)$ (respectiv $p_Y(x,y)$). Cu aceste notaţii, $p_X(x,y)=x$ şi $p_Y(x,y)=y$, $\forall(x,y)\in X\times Y$. Similar se definesc şi proiecţiile canonice ale unui produs cartezian format din mai mult de doi factori.

4) Fie $f:A\longrightarrow B$, $g:C\longrightarrow D$ două aplicaţii. Corespondenţa $f\times g: A\times C\longrightarrow B\times D$, definită prin egalitatea

$$(f\times g)(a,c)=(f(a), g(c)),$$

este o aplicaţie (exerciţiu!), numită produsul cartezian al aplicaţiilor f şi g. In baza definiţiilor de mai sus, rezultă egalităţile de aplicaţii :

$$f\circ p_A = p_B\circ(f\times g) \quad \text{şi} \quad g\circ p_C = p_C = p_D\circ(f\times g)$$

(exerciţiu!). Similar se defineşte şi produsul cartezian a n aplicaţii ($n>2$).

5) Dacă $f:A \longrightarrow B$ şi $g:A \longrightarrow C$ sînt aplicaţii cu acelaşi domeniu de definiţie A, atunci corespondenţa $(f,g):A \longrightarrow B\times C$, definită prin egalitatea

$$(f,g)(a) = (f(a), g(a)),\ a\in A,$$

este o aplicaţie (exerciţiul). Dacă $(f,g):A \longrightarrow B\times C$ şi $(f_1,g_1):A \longrightarrow B\times C$ sînt aplicaţii, atunci $(f,g)=(f_1,g_1)$ dacă şi numai dacă $f=f_1$ şi $g=g_1$. Aplicaţiile f şi g se numesc <u>componentele</u> lui (f,g). Cu aceste notaţii să observăm că $(p_A, p_B)=1_{A\times B}$, unde p_A şi p_B sînt proiecţiile canonice ale produsului cartezian Să mai observăm că dacă $F:A \longrightarrow B\times C$ este o aplicaţie, atunci în mod necesar $F=(p_B \circ F, p_C \circ F)$. Construcţia indicată la acest exemplu poate fi de asemenea generalizată la cazul a n aplicaţii avînd acelaşi domeniu de definiţie.

In legătură cu compunerea aplicaţiilor mai reamintim următoarele două proprietăţi importante:

1.17 <u>Propoziţie</u>. 1) Dacă $f:A \longrightarrow B$, $g:B \longrightarrow C$, $h:C \longrightarrow D$ sînt trei aplicaţii, atunci $(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$ (asociativitatea compunerii aplicaţiilor);

2. Dacă $f:A \longrightarrow B$ este o aplicaţie, atunci

$$f\circ 1_A = f \quad \text{şi} \quad 1_B \circ f = f.$$

Demonstraţia acestor afirmaţii o lăsăm ca exerciţiu cititorului.

1.18 <u>Definiţie</u>. Fie $g:A \longrightarrow B$, $f:X \longrightarrow Y$ două aplicaţii. Dacă $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ şi $g(a)=f(a)$ oricare ar fi $a\in A$, se zice că f este o <u>prelungire</u> (sau extensie) a aplicaţiei g.

In acest caz, dacă Γ_g (respectiv Γ_f) este graficul lui g (respectiv f), atunci $\Gamma_g \subseteq \Gamma_f$ (exerciţiul).

De exemplu, dacă $f:A \longrightarrow B$ este o aplicaţie şi $X\subseteq A$, atunci f este o prelungire a lui $f|_X$ [v.1.16,1)].

1.19 Definiţii. Fie $f:A \longrightarrow B$ o aplicaţie. Se zice că f este injectivă dacă oricare ar fi $a, a_1 \in A$ cu proprietatea $f(a)=f(a_1)$, rezultă $a=a_1$. Se zice că f este surjectivă dacă oricare ar fi $b \in B$, există $a \in A$ astfel încît $b=f(a)$. Se zice că f este bijectivă dacă este atît injectivă cît şi surjectivă.

Observaţie. Aplicaţia $f:A \longrightarrow B$ este injectivă dacă şi numai dacă verifică proprietatea : oricare ar fi $a, a_1 \in A$, cu proprietatea $a \neq a_1$, rezultă $f(a) \neq f(a_1)$ (exerciţiu!).

Exemple. 1) Dacă $X \subseteq A$ este o submulţime a lui A, atunci aplicaţia de incluziune $i:X \longrightarrow A$ este injectivă.

2) Dacă $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, proiecţiile canonice p_A, p_B ale produsului cartezian $A \times B$ sînt surjective.

3) Aplicaţia identică $1_A:A \longrightarrow A$ este bijectivă.

In legătură cu compunerea unor asemenea tipuri de aplicaţii reamintim următoarele proprietăţi.

1.20 Propoziţie. Fie $f:A \longrightarrow B$ şi $g:B \longrightarrow C$ două aplicaţii:

1) Dacă f şi g sînt injective (respectiv surjective, respectiv bijective), atunci $g \circ f$ este injectivă (respectiv surjectivă, respectiv bijectivă).

2) Dacă $g \circ f$ este injectivă (respectiv surjectivă), atunci f (respectiv g) este injectivă (respectiv surjectivă).

3) Dacă $g \circ f$ este bijectivă, atunci f este injectivă şi g este surjectivă. In particular, dacă $A=C$ şi $g \circ f = 1_A$, atunci f este injectivă şi g este surjectivă.

4) Dacă $A=C$ şi $g \circ f = 1_A$, atunci g este bijectivă dacă şi numai dacă f este bijectivă, ceea ce este echivalent cu $f \circ g = 1_B$.

Vom demonstra doar ultima afirmaţie, restul rămînînd ca exerciţiu pe seama cititorului. Ipoteza $g \circ f = 1_A$ implică g

surjectivă şi f injectivă. Dacă g este bijectivă, să presupunem prin absurd că există $b_o \in B$ astfel încît $(f \circ g)(b_o) \neq b_o$. Dar atunci $g(b_o)=(1_A \circ g)(b_o)=((g \circ f) \circ g)(b_o)=(g \circ (f \circ g))(b_o)=$ $=g((f \circ g)(b_o)) \neq g(b_o)$, ultima relaţie fiind o consecinţă a faptului că g este injectivă. Deci $g(b_o) \neq g(b_o)$, ceea ce contrazice (2) din 1.14. Prin urmare, $f \circ g = 1_B$, de unde rezultă f bijectivă. Reciproc, dacă f este bijectivă, să presupunem din nou prin absurd că există $b_o \in B$ astfel încît $f(g(b_o)) \neq b_o$. Deoarece f este surjectivă, există $a_o \in A$ astfel încît $f(a_o)=b_o$. Deci $f(a_o)=(f \circ 1_A)(a_o)=(f \circ (g \circ f))(a_o)=(f \circ g)(b_o) \neq b_o = f(a_o)$, adică $f(a_o) \neq f(a_o)$, o contradicţie. Prin urmare, $f \circ g = 1_B$, de unde rezultă g bijectivă.

Q. E. D.

1.21. <u>Propoziţie</u>. Fie $f:A \longrightarrow B$ o aplicaţie. Atunci au loc afirmaţiile:

1) f este injectivă $\iff f(C_A(X)) \subseteq C_B(f(X))$, oricare ar fi $X \subseteq A$;

2) f este surjectivă $\iff C_B(f(X)) \supseteq f(C_A(X))$, oricare ar fi $X \subseteq A$;

3) f este bijectivă $\iff f(C_A(X)) = C_B(f(X))$, oricare ar fi $X \subseteq A$.

Să demonstrăm prima din aceste afirmaţii. Să presupunem f injectivă. Fie $u \in f(C_A(X))$. Atunci există $v \in C_A(X)$, adică $v \in A$ şi $v \in X$, astfel încît $u=f(v)$. Deoarece f este injectivă, rezultă că $\forall x \in X$, $f(x) \neq f(v)=u$, adică $u \neq f(x)$, ceea ce implică $u \in f(X)$, sau $u \in C_B(f(X))$. Reciproc, fie $a, a_1 \in A$ cu proprietatea $f(a)=f(a_1)$ şi să presupunem prin absurd că $a \neq a_1$. Atunci $a_1 \in C_A(\{a\})$. Deoarece $f(C_A(\{a\})) \subseteq C_B(f(\{a\}))=C_B(\{f(a)\})$, rezultă $f(a_1) \in C_B(\{f(a)\})$, adică $f(a_1) \neq f(a)$, o contradicţie.

Celelalte afirmaţii rămîn ca exerciţiu în seama cititoru-

lui.

1.22 Definiţie. Fie $f:A \longrightarrow B$ o aplicaţie. Se numeşte retractă a lui f o aplicaţie $r:B \longrightarrow A$ astfel încît $r \circ f = 1_A$. Se numeşte secţiune a lui f o aplicaţie $s:B \longrightarrow A$ astfel încît $f \circ s = 1_B$.

1.23 Propoziţie. Fie $f:A \longrightarrow B$ o aplicaţie, $A \neq \emptyset$. Atunci f admite o retractă dacă şi numai dacă f este injectivă.

Demonstraţie. Dacă f admite o retractă $r:B \longrightarrow A$, atunci $r \circ f = 1_A$. După propoziţia 1.20,3), rezultă că f este injectivă. Reciproc, să presupunem f injectivă. Deoarece $A \neq \emptyset$, există $a_0 \in A$. Definim corespondenţa $r:B \longrightarrow A$ prin egalitatea

$$r(b) = \begin{cases} a & \text{dacă } b = f(a), \\ a_0 & \text{dacă } b \in f(A). \end{cases}$$

Să observăm că dacă pentru un $b \in f(A)$ dat ar exista două elemente $a, a_1 \in A$ astfel încît $b=f(a)$ şi $b=f(a_1)$, atunci $f(a)=f(a_1)$, adică $a=a_1$, căci f este injectivă. Cu alte cuvinte r satisface condiţia (2) din 1.14, adică r este o aplicaţie. Dacă $a \in A$, atunci

$$(r \circ f)(a) = r(f(a)) = r(b) = a,$$

unde $b=f(a)$, adică $r \circ f = 1_A$.

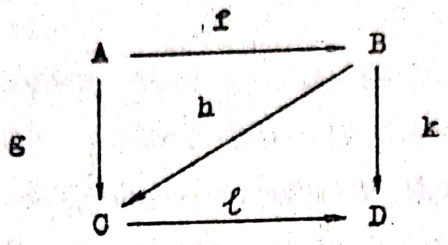
Q. E. D.

In legătură cu existenţa secţiunilor vom reveni cu precizări la sfîrşitul acestui paragraf. Ne mărginim acum să dăm doar un exemplu. Fie $f:A \longrightarrow B$ o aplicaţie. Atunci aplicaţia $s:A \longrightarrow A \times B$, $s(a)=(a,f(a))$ este o secţiune a proiecţiei canonice $p_A:A \times B \longrightarrow A$, $p_A(a,b)=a$. In adevăr, pentru orice $a \in A$, $(p_A \circ s)(a) = p_A(s(a)) = p_A(a,f(a)) = a$, adică $p_A \circ s = 1_A$.

1.24 Definiţie. O diagramă de aplicaţii între diverse mul-

ţimi se zice <u>comutativă</u> dacă toate aplicaţiile compuse din diagramă între orice pereche dată de mulţimi sînt egale.

De exemplu, comutativitatea diagramei



înseamnă că $h \circ f = g$, $\ell \circ h = k$, şi (deci) $k \circ f = \ell \circ g$.

1.25 <u>Definiţie</u>. O mulţime A se zice <u>numărabilă</u> dacă există o aplicaţie bijectivă $f: A \longrightarrow \mathbb{N}$, unde $\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$. O mulţime A se zice <u>finită</u> dacă există $n \in \mathbb{N}$ şi o aplicaţie bijectivă $f: A \longrightarrow \{1,2,\dots,n\}$ (în acest caz se zice că A are n elemente).

Dacă A este o mulţime finită ce are n elemente, vom nota cu $a_i \in A$ acel element din A cu proprietatea $f(a_i) = i$, $i = 1,\dots,n$.

1.26 <u>Propoziţie.</u> Dacă A este o mulţime arbitrară, 2^A mulţimea tuturor aplicaţiilor avînd domeniul de definiţie A şi codomeniul mulţimea $\{0,1\}$ ce constă din două elemente, iar $\mathrm{Sub}(A)$ este familia tuturor submulţimilor lui A, atunci corespondenţa

$$\varphi : 2^A \longrightarrow \mathrm{Sub}(A),\quad \varphi(f) = \{a \mid a \in A \text{ şi } f(a) = 0\},$$

unde $f \in 2^A$, este o aplicaţie bijectivă. In particular, dacă $A = \{a_1,\dots,a_n\}$ este o mulţime finită formată din n elemente, atunci mulţimea tuturor submulţimilor lui A are 2^n elemente.

<u>Demonstraţie</u>. Aplicaţia φ este injectivă: dacă $f,g \in 2^A$ şi $\varphi(f) = \varphi(g)$, atunci $f = g$. In adevăr, dacă $B = \{a \mid a \in A \text{ şi } f(a) = 0\} = \{a \mid a \in A \text{ şi } g(a) = 0\}$, atunci $f(a) = 0$, $\forall a \in B \Longleftrightarrow g(a) = 0$, $\forall a \in B$, ceea ce implică $f(a) = g(a) = 0$, $\forall a \in B$, deci şi $f(a) = g(a) = 1$, $\forall a \in A, a \notin B$, adică $f(a) = g(a)$, $\forall a \in A$. Aplicaţia φ este surjectivă,

căci dată submulţimea $B \subseteq A$, i.e. $B \in Sub(A)$, există aplicaţia $f \in 2^A$, anume

$$f(a) = \begin{cases} 0 & a \in B, \\ 1 & a \bar{\in} B, \end{cases}$$

astfel încît $\varphi(f)=B$. In particular, dacă A conţine n elemente, atunci se ştie că 2^A are $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$ elemente.

Q. E. D.

Notaţie. Pentru o mulţime A, vom nota cu 2^A familia tuturor submulţimilor lui A. Această notaţie este motivată de 1.26.

Date două mulţimi A şi B, B^A va nota mulţimea tuturor aplicaţiilor avînd domeniul de definiţie A şi codometrul B [foarte des se foloseşte şi notaţia $Hom(A,B)$ sau $Map(A,B)$]. O axiomă a teoriei mulţimilor afirmă că B^A este într-adevăr o mulţime.

Imagine inversă

1.27 Definiţie. Fie $f \in B^A$. Corespondenţa avînd domeniul 2^B şi codomeniul 2^A şi care submulţimii B_1 a lui B îi face să-i corespundă submulţimea $\{ a \mid a \in A \text{ şi } f(a) \in B_1 \}$ a lui A este o aplicaţie care va fi notată cu f^{-1}. Deci $f^{-1} \in (2^A)^{2^B}$. Mulţimea

$$f^{-1}(B_1) = \{ a \mid a \in A \text{ şi } f(a) \in B_1 \},$$

unde $B_1 \subseteq B$, se numeşte imaginea inversă a mulţimii B_1 prin aplicaţia f.

1.28 Observaţie. Deşi f^{-1} a fost definită ca o aplicaţie de la 2^B la 2^A, în cazul cînd f este o bijecţie, f^{-1} poate fi concepută şi ca o aplicaţie de la B la A, anume identificînd mulţimea formată dintr-un singur punct $\{ b \}$ cu b şi $f^{-1}(\{ b \})$ cu a, unde $f(a) = b$.

1.29 Propoziţie. Fie $f: A \to B$ o aplicaţie, fie $X_1, Y_1 \in 2^A$,

$\mathcal{S}_1 \subseteq 2^A$ şi fie $X_2, Y_2 \in 2^B$, $\mathcal{S}_2 \subseteq 2^B$. Atunci

(1) $f(\emptyset) = \emptyset$, $X_1 \subseteq Y_1 \Longrightarrow f(X_1) \subseteq f(Y_1)$,

$$f\Big(\bigcup_{S_1 \in \mathcal{S}_1} S_1\Big) = \bigcup_{S_1 \in \mathcal{S}_1} f(S_1)$$

şi

$$f\Big(\bigcap_{S_1 \in \mathcal{S}_1} S_1\Big) \subseteq \bigcap_{S_1 \in \mathcal{S}_1} f(S_1).$$

Egalitatea $f(X_1 \cap Y_1) = f(X_1) \cap f(Y_1)$ are loc pentru orice $X_1, Y_1 \in 2^A$ dacă şi numai dacă f este injectivă.

(2) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, f^{-1}(B) = A, X_2 \subseteq Y_2 \Rightarrow f^{-1}(X_2) \subseteq f^{-1}(Y_2)$,

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{S_2 \in \mathcal{S}_2} S_2\Big) = \bigcup_{S_2 \in \mathcal{S}_2} f^{-1}(S_2)$$

şi, dacă $\mathcal{S}_2 \neq \emptyset$,

$$f^{-1}\Big(\bigcap_{S_2 \in \mathcal{S}_2} S_2\Big) = \bigcap_{S_2 \in \mathcal{S}_2} f^{-1}(S_2).$$

(3) Pentru orice mulţime $Y \subset B$,

$$f^{-1}(C_B(Y)) = C_A(f^{-1}(Y)).$$

(4) Dacă $X \subseteq A$ şi $Y \subseteq B$, atunci $X \subseteq f^{-1}(Y) \Leftrightarrow f(X) \subseteq Y$.

(5) Dacă $g: B \longrightarrow C$ este o altă aplicaţie, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

(6) Corespondenţa $\varphi : 2^A \longrightarrow 2^A$ definită în felul următor:

$\varphi(X) = f^{-1}(f(X))$, oricare ar fi $X \in 2^A$,

este o aplicaţie, care se bucură de proprietăţile

a) $\varphi \circ \varphi = \varphi$;

b) f este injectivă $\Longleftrightarrow$ $\varphi = 1_{2^A}$.

(7) Corespondenţa $\psi : 2^B \longrightarrow 2^B$ definită în felul următor:

$\psi(Y) = f(f^{-1}(Y))$, oricare ar fi $Y \in 2^B$,

este o aplicaţie, care se bucură de proprietăţile:

a) $\psi \circ \psi = \psi$

b) f este surjectivă $\iff \psi = 1_{2^B}$.

Să demonstrăm de exemplu afirmaţia (6),b). Observăm întîi că oricare ar fi $X \in 2^A$, $X \subseteq f^{-1}(f(X))$. In adevăr, dacă $x \in X$, atunci $f(x) \in f(X)$, adică $x \in f^{-1}(f(X))$. Prin urmare $\varphi = 1_{2^A}$ dacă şi numai dacă pentru orice $X \in 2^A$, $f^{-1}(f(X)) \subseteq X$.

Să presupunem că f este injectivă. In baza celor stabilite mai sus este suficient să demonstrăm că oricare ar fi $X \in 2^A$, $f^{-1}(f(X)) \subseteq X$. Fie $a \in f^{-1}(f(X))$. Atunci $f(a) \in f(X)$, adică există $x \in X$. Astfel încît $f(a) = f(x)$. Deoarece f este injectivă rezultă $a = x$, adică $a \in X$.

Pentru a dovedi cealalată implicaţie, procedăm prin reducere la absurd. Să presupunem deci că pentru orice $X \in 2^A$, $f^{-1}(f(X)) \subseteq X$ şi că f nu ar fi injectivă. Este suficient atunci să determinăm o submulţime X din A astfel încît $f^{-1}(f(X))$ să nu fie inclusă în X. Deoarece f nu este injectivă, există elemente distincte $a, a_1 \in A$, $a \neq a_1$, astfel încît $f(a) = f(a_1)$. Dacă notăm $X = \{a\}$, atunci $a_1 \in f^{-1}(f(X))$, dar $a_1 \notin X$; deci $f^{-1}(f(X))$ nu este inclusă în X.

In sfîrşit, în legătură cu (7),b), mai atragem atenţia asupra incluziunii imediate:

$f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$, oricare ar fi $Y \in 2^B$.

Celelalte afirmaţii rămîn ca exerciţii în seama cititorului.

Legătura dintre partiţii şi relaţii de echivalenţă. Aplicaţii compatibile cu relaţii de echivalenţă

1.30 Definiţie. Fie T o mulţime şi $\mathcal{S}$ o familie de mulţimi. Vom spune că $\mathcal{S}$ este indexată de mulţimea T dacă există o aplicaţie surjectivă $\varphi : T \longrightarrow \mathcal{S}$. Pentru $t \in T$ mulţimea $\varphi(t)$ din $\mathcal{S}$ va fi notată cu S_t.

Notaţie. Indexarea lui $\mathcal{S}$ după mulţimea T se notează în felul următor: $\{ S_t \}_{t \in T}$.

Să observăm că în baza lui 1.30 aceeaşi mulţime din $\mathcal{S}$ poate avea indici distincţi. In particular se poate întîmpla ca toate mulţimile S_t ale familiei $\mathcal{S}$ să fie egale. Prin urmare, conceptul de familie este diferit de cel de submulţime.

1.31 Definiţie. Fie A o mulţime nevidă. O familie $\{A_t\}_{t \in T}$ de submulţimi a lui A se numeşte partiţie, dacă sînt îndeplinite următoarele condiţii:

(1) oricare ar fi $t \in T$, $A_t \neq \emptyset$;

(2) $A_t \cap A_s = \emptyset$, oricare ar fi $t \neq s$, $t, s \in T$

(în mod necesar, aplicaţia φ din definiţia precedentă trebuie să fie în acest caz şi injectivă);

(3) $A = \bigcup_{t \in T} A_t$.

1.32 Definiţie. Fie A o mulţime. O relaţie binară pe A se numeşte de echivalenţă dacă este reflexivă, simetrică şi tranzitivă. Dacă R este o relaţie de echivalenţă pe A şi dacă $a \in A$ (deci $A \neq \emptyset$), atunci mulţimea

$$[a]_R = \{ b \mid b \in A, bRa \}$$

se numeşte clasa de echivalenţă asociată elementului a prin

relaţia R, iar mulţimea

$$A/R = \{ [a]_R \mid a \in A \}$$

se numeşte <u>mulţimea factor</u> a mulţimii A în raport cu relaţia R. Dacă R este o relaţie de echivalenţă pe A, o mulţime $X \subseteq A$ se numeşte <u>mulţime saturată</u> în raport cu R dacă X se poate scrie ca o uniune de clase de echivalenţă în raport cu R. Aplicaţia

$$q_{A,R} : A \longrightarrow A/R$$

definită prin egalitatea $q_{A,R}(a) = [a]_R$, se numeşte <u>proiecţia canonică</u> a mulţimii A pe mulţimea factor A/R. Dacă R este o relaţie de echivalenţă pe A şi $q_{A,R}: A \longrightarrow A/R$ este proiecţia canonică, se numeşte <u>saturata</u> mulţimii $X \subseteq A$ în raport cu R mulţimea $q^{-1}_{A,R}(q_{A,R}(X)) = \bigcup_{x \in X} [x]_R$.

1.33 <u>Observaţii.</u> 1) Dacă nu este nici un pericol de confuzie, deseori în loc de $[a]_R$ (respectiv $q_{A,R}$) vom nota mai simplu $[a]$ (respectiv q).

2) Dacă presupunem că există $a \in A$, adică $A \neq \emptyset$, atunci $a \in [a]_R$. Acest fapt rezultă imediat din reflexivitatea lui R.

3) $[a]_R = [b]_R \Longleftrightarrow a R b$.

In adevăr, dacă presupunem $[a]_R = [b]_R$, atunci din observaţia precedentă rezultă că $a \in [b]_R$ şi deci aRb. Reciproc să presupunem aRb. Dacă $c \in [a]_R$, atunci $c R a$ şi din tranzitivitatea lui R rezultă cRb, de unde $c \in [b]_R$ şi deci incluziunea $[a]_R \subseteq [b]_R$. Similar se verifică şi incluziunea $[b]_R \subseteq [a]_R$.

4) Aplicaţia $q_{A,R} : A \longrightarrow A/R$ este surjectivă.

5) $X \subseteq A$ este o mulţime saturată în raport cu R dacă şi numai dacă $X = q^{-1}(q(X))$, unde $q: A \longrightarrow A/R$ este proiecţia

canonică.

Exemple. 1) Δ_A este o relaţie de echivalenţă pe A.

2) Dacă $f:A \to B$ este o aplicaţie, atunci relaţia binară R_f definită pe mulţimea A în felul următor:

$$aR_f a_1 \iff f(a) = f(a_1),$$

este o relaţie de echivalenţă.

1.34. Propoziţie. Orice partiţie $\{A_t\}_{t\in T}$ a unei mulţimi nevide A determină o relaţie de echivalenţă R pe A, anume $R=\bigcup_{t\in T}(A_t \times A_t)$. Reciproc, orice relaţie de echivalenţă R pe o mulţime nevidă A determină o partiţie a lui A, anume: $\{[a]_R\}_{[a]_R\in A/R}$.

Demonstraţie. Dacă $A\neq\emptyset$, fie $a\in A$; atunci din 1.31 rezultă că există $t\in T$, astfel încît $a\in A_t$, deci $(a,a)\in A_t\times A_t$, adică aRa şi prin urmare R este reflexivă. Fie acum $a,b\in A$ astfel încît aRb. Atunci există $t\in T$ astfel încît $a\in A_t$ şi $b\in A_t$; deci $b\in A_t$ şi $a\in A_t$, aşa încît bRa, adică R este simetrică. Dacă $a,b,c\in A$ sînt astfel încît aRb şi bRc, atunci există $t,s\in T$ astfel încît $a,b\in A_t$ şi $b,c\in A_s$. Deoarece $b\in A_t\cap A_s$, rezultă neapărat t=s şi deci $a,c\in A_t$, ceea ce implică aRc. Deci R este şi tranzitivă, adică R este o relaţie de echivalenţă.

Reciproc, fie R o relaţie de echivalenţă pe mulţimea nevidă A. Atunci $[a]_R\neq\emptyset$, $\forall a\in A$, căci $a\in[a]_R$ [v.1.33,2)]. Pe de altă parte, egalitatea $A=\bigcup_{[a]_R\in A/R}[a]_R$ este evidentă. In sfîrşit, dacă $[a]_R\neq[b]_R$, atunci $[a]_R\cap[b]_R=\emptyset$. Pentru a verifica această ultimă afirmaţie, procedăm prin reducere la absurd. Dacă presupunem deci $[a]_R\cap[b]_R\neq\emptyset$ există $c\in[a]_R\cap[b]_R$, ceea ce implică cRa şi cRb. Deoarece R este simetrică şi tranzitivă obţinem că aRb şi atunci din 1.33,3) rezultă $[a]_R=[b]_R$, o contradicţie.

Q. E. D.

Cu situaţia descrisă în propoziţia următoare ne vom întîlni, mai departe, destul de frecvent.

1.35. Propoziţie. Fie A (respectiv B) o mulţime pe care

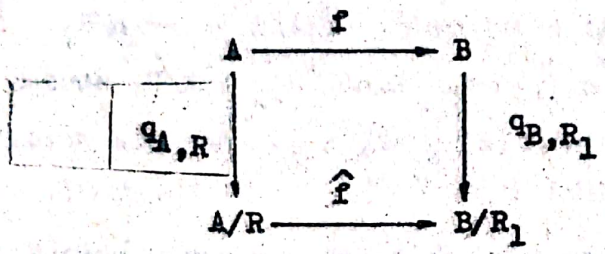
s-a definit relaţia de echivalenţă R (respectiv R_1) şi $f:A \longrightarrow B$ o aplicaţie avînd proprietatea

$$aRa_1 \Longrightarrow f(a)R_1f(a_1),$$

adică, cum se mai zice, f este compatibilă cu R şi R_1. Atunci există o aplicaţie unică

$$\hat{f}:A/R \longrightarrow B/R_1$$

astfel încît diagrama



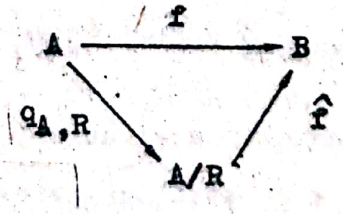
să fie comutativă (v.1.24) adică $\hat{f} \circ q_{A,R} = q_{B,R_1} \circ f$. In particular, dacă R este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea A şi $f:A \longrightarrow B$ este o aplicaţie avînd proprietatea

$$aRa_1 \Longrightarrow f(a)=f(a_1),$$

atunci există o aplicaţie unică

$$\hat{f}: A/R \longrightarrow B$$

astfel încît diagrama



să fie comutativă.

Demonstraţie. Definim corespondenţa $\hat{f}:A/R \longrightarrow B/R_1$ prin egalitatea

$$\hat{f}([a]_R) = [f(a)]_{R_1}.$$

Dacă $[a]_R = [a_1]_R$, atunci aRa_1 [v.1.33,3)] şi deci conform ipotezei $f(a)R_1f(a_1)$, de unde rezultă că $[f(a)]_{R_1} = [f(a_1)]_{R_1}$. Prin urmare este îndeplinită condiţia (2) din 1.14, adică cores-

pondenţa $\hat{f}$ este o aplicaţie.

Dacă $a \in A$ este un element arbitrar, atunci

$$(\hat{f} \circ q_{A,R})(a) = \hat{f}(q_{A,R}(a)) = \hat{f}([a]_R) = [f(a)]_{R_1} =$$

$$= q_{B,R_1}(f(a)) = (q_{B,R_1} \circ f)(a),$$

ceea ce arată că $\hat{f} \circ q_{A,R} = q_{B,R_1} \circ f$.

Să demonstrăm unicitatea aplicaţiei $\hat{f}$. Presupunem, prin absurd, că ar mai exista o aplicaţie $\hat{\hat{f}}: A/R \longrightarrow B/R_1$, $\hat{\hat{f}} \neq \hat{f}$, astfel încît $\hat{\hat{f}} \circ q_{A,R} = q_{B,R_1} \circ f$. Dacă $[a]_R \in A/R$, atunci $\hat{\hat{f}}([a])_R = \hat{\hat{f}}(q_{A,R}(a)) = (q_{B,R_1} \circ f)(a) = [f(a)]_{R_1} = \hat{f}([a]_R)$, de unde rezultă $\hat{\hat{f}} = \hat{f}$, o contradicţie.

In sfîrşit, ultima afirmaţie este un caz particular al primeia, $(R_1 = \Delta_B)$. Notăm doar că în acest caz aplicaţia $\hat{f}$ se defineşte prin: $\hat{f}([a]_R) = f(a)$.

Q. E. D.

1.36 Corolar. Dacă $f: A \longrightarrow B$ este o aplicaţie, atunci există o aplicaţie bijectivă unică

$$\tilde{f}: A/R_f \longrightarrow f(A)$$

astfel încît:

$$i_{f(A),B} \circ \tilde{f} \circ q_{A,R_f} = f.$$

Demonstraţie. Existenţa şi unicitatea aplicaţiei $\tilde{f}$ sînt o consecinţă imediată a propoziţiei precedente [$R = R_f$ (v. exemplul 2) ce precede 1.34 şi $R_1 = \Delta_B$]. Rămîne să dovedim că $\tilde{f}$ este bijectivă. Dacă $[a]_{R_f}, [a_1]_{R_f} \in A/R_f$ sînt astfel încît $\tilde{f}([a]_{R_f}) = \tilde{f}([a_1]_{R_f})$, atunci în baza definiţiei lui $\tilde{f}$, $f(a) = f(a_1)$. Din modul cum este definită relaţia binară R_f rezultă $aR_f a_1$ şi deci $[a]_{R_f} = [a_1]_{R_f}$ [v. 1.33,3)]. Prin urmare, $\tilde{f}$ este injectivă.

Dacă $b \in f(A)$, atunci există $a \in A$ astfel încît $f(a)=b$, de unde rezultă că $\tilde{f}([a]_{R_f})=f(a)=b$, adică $\tilde{f}$ este și surjectivă.

1.37 Observație. Dacă $f:A \longrightarrow B$ este o aplicație, atunci lui f îi putem ataşa următoarele cinci aplicații :

q_{A,R_f} = proiecția canonică a mulțimii A pe mulțimea factor A/R_f ;

$\tilde{f}$ = aplicația de la A/R_f pe $f(A)$ care asociază lui $[a]_{R_f}$ elementul $f(a) \in f(A)$;

$i_{f(A),B}$ = aplicația de incluziune a lui $f(A)$ în B;

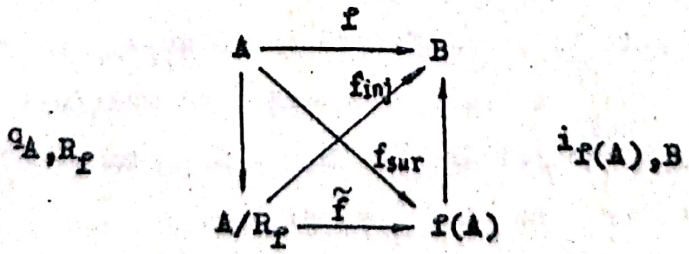
f_{sur} = aplicația de la A pe $f(A)$ care asociază lui $a \in A$ elementul $f(a) \in f(A)$;

$f_{inj}=\hat{f}$ = aplicația de la A/R_f în B care asociază lui $[a]_{R_f}$ elementul $f(a) \in B$.

Aplicațiile $i_{f(A),B}$ și f_{inj} (respectiv q_{A,R_f} și f_{sur}) sînt injective (respectiv surjective), în timp ce $\tilde{f}$ este o bijecție (v. 1.36) In plus,

$$f=i_{f(A),B} \circ f_{sur} = f_{inj} \circ q_{A,R_f} = i_{f(A),B} \circ \tilde{f} \circ q_{A,R_f} .$$

Aceste aplicații pot fi aranjate în diagrama comutativă :



In sfîrșit, să notăm că pentru orice $a \in A$, $q_{A,R_f}(a)=f^{-1}(\{f(a)\})$. De asemenea, dacă f este injectivă (respectiv surjectivă), atunci $\tilde{f}=f_{sur}$ (respectiv $\tilde{f}=f_{inj}$).

Produs cartezian generalizat. Axioma alegerii.

1.38. **Definiţie.** Fie $\mathcal{S}$ o familie de mulţimi $\{S_t\}_{t\in T}$ indexată de mulţimea T (v.1.30). Se numeşte produs cartezian generalizat mulţimea notată cu $\prod_{t\in T} S_t$ şi definită de egalitatea

$$\prod_{t\in T} S_t = \{ f \mid f:T \longrightarrow \bigcup_{t\in T} S_t,\ f(u)\in S_u,\ \text{pentru orice } u\in T \}.$$

Pentru orice $u\in T$ definim aplicaţia

$$p_{S_u} : \prod_{t\in T} S_t \longrightarrow S_u$$

dată de egalitatea: $p_{S_u}(f)=f(u)$. Aplicaţiile p_{S_t} $(t\in T)$ se numesc proiecţiile canonice ale produsului cartezian generalizat şi se notează adesea mai simplu cu p_t.

1.39 **Observaţii** 1) Noţiunea de produs cartezian generalizat introdusă mai sus extinde noţiunea de produs cartezian a două mulţimi $S_1 \times S_2$ (v. 1.8) In adevăr, fie $T=\{1,2\}$, $\mathcal{S}=\{S_1,S_2\}$ şi fie $\varphi:T\longrightarrow\mathcal{S}$ definită prin $\varphi(i)=S_i$, $i=1,2$. Atunci $S_1 x S_2 = \{(s_1,s_2) \mid s_i\in S_i,\ i=1,2\}$ şi $\prod_{t\in T} S_t = \{f \mid f:\{1,2\}\longrightarrow S_1\cup S_2,\ f(i)\in S_i,\ \forall i=1,2\}$, mulţime care poate fi identificată cu $\{(f(1), f(2)) \mid f(i)\in S_i,\ \forall i=1,2\}$, care la rîndul ei poate fi identificată cu $S_1 x S_2$.

2) Fie $\{S_t\}_{t\in T}$ o familie indexată de mulţimea $T, T\neq\emptyset$ Dacă există un $t_o\in T$ astfel încît $S_{t_o}=\emptyset$, atunci $\prod_{t\in T} S_t=\emptyset$. Pentru cazul particular $T=\{1,2\}$ v. şi 1.9.

3) Fie $\{S_t\}_{t\in T}$, $\{Q_t\}_{t\in T}$ două familii de mulţimi indexate de aceeaşi mulţime T. Să presupunem că pentru fiecare $t\in T$ este dată o aplicaţie $f_t:S_t\longrightarrow Q_t$. Atunci putem defini aplicaţia:

$$\prod_{t\in T} f_t : \prod_{t\in T} S_t \longrightarrow \prod_{t\in T} Q_t$$

prin egalitatea

$$\left[\left(\prod_{t\in T} f_t\right)(g)\right](t_o) = f_{t_o}(g(t_o)), \text{ unde } g \in \prod_{t\in T} S_t \text{ şi } t_o \in T.$$

Se observă imediat că

$$p_{Q_u} \circ \prod_{t\in T} f_t = f_u \circ p_{S_u}, \text{ oricare ar fi } u \in T.$$

Aplicaţia $\prod_{t\in T} f_t$ se numeşte <u>produsul cartezian generalizat al familiei de aplicaţii</u> $\left\{ f_t \right\}_{t\in T}$. Dacă $T = \left\{1,\ldots,n\right\}$, atunci produsul cartezian de aplicaţii $\prod_{t\in T} f_t$ se mai notează şi cu $f_1 x \ldots x f_n$ [pentru cazul $T = \left\{1,2\right\}$, v. şi 1.16,4)] .

4) Aşa cum a fost definită, $\prod_{t\in T} S_t$ este o mulţime de aplicaţii. Se pune întrebarea dacă există asemenea aplicaţii, adică dacă $\prod_{t\in T} S_t \neq \emptyset$. Cu alte cuvinte, date infinit de multe mulţimi nevide, este posibil de a face <u>o alegere</u> a unui element din fiecare mulţime? In acest curs vom accepta răspunsul afirmativ ca o axiomă.

<u>Axioma alegerii</u>. Fie $\left\{ S_t \right\}_{t\in T}$ o familie indexată de mulţimea nevidă T astfel încît $S_t \neq \emptyset$ oricare ar fi $t\in T$. Atunci $\prod_{t\in T} S_t \neq \emptyset$.

Menţionăm că în 1963, P.J. Cohen a arătat că axioma alegerii este independentă de celelalte axiome ale teoriei mulţimilor (în sistemul Zermelo-Fraenkel).

Axioma alegerii este echivalentă cu diferite alte axiome, dintre care menţionăm următoarele două:

I. Orice aplicaţie surjectivă admite o secţiune, adică oricare ar fi mulţimile nevide A,B şi aplicaţia surjectivă $g:B\to A$, există o aplicaţie $f:A \longrightarrow B$ astfel încît $g\circ f = 1_A$.

Pentru a putea formula şi cealaltă axiomă, vom reaminti

întîi următoarele noţiuni.

1.40 Definiţie. Fie S o mulţime. O relaţie binară $R \subseteq S \times S$ pe mulţimea S se numeşte de parţială ordonare dacă este reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă (v.şi 1.11). O mulţime pe care s-a dat o relaţie de parţială ordonare R se numeşte mulţime parţial ordonată de R. O relaţie binară R pe mulţimea S se numeşte de totală ordonare pe S dacă R este de parţială ordonare şi totală (v.din nou şi 1.11). O mulţime pe care s-a dat o relaţie de totală ordonare R se numeşte mulţime total ordonată de R.

Exemplu. Relaţia " $\leqslant$ " este de totală ordonare pe mulţimea R a numerelor reale.

II. (Principiul maximalităţii). Dacă S este o mulţime parţial ordonată de relaţia R şi T este o submulţime a lui S total ordonată de R atunci există o mulţime M astfel încît următoarele afirmaţii sînt adevărate:

(1) $T \subset M \subset S$;

(2) M este total ordonată de R;

(3) Dacă $M \subset N \subset S$ şi N este total ordonată de R, atunci $M=N$,

adică M este o submulţime total ordonată maximală ce conţine pe T.

C A P I T O L U L I I

SPATII TOPOLOGICE SI APLICATII CONTINUE

Structuri topologice. Imagini şi contraimagini de structuri topologice. Operatorii topologici de interior şi de închidere. Spaţii Baire.

Inainte de a defini conceptul de spaţiu topologic, vom încerca să motivăm introducerea acestuia prin proprietăţi ale unor spaţii mai familiare, anume a spaţiilor metrice.

Vom reaminti întîi noţiunea de spaţiu metric.

2.1 Definitie. Un spaţiu metric este un ansamblu (M, ρ) format dintr-o mulţime nevidă M şi o aplicaţie $\rho : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ astfel încît pentru orice elemente $m_1, m_2, m_3 \in M$ să fie satisfăcute proprietăţile:

(1) $\rho(m_1, m_2) = 0 \iff m_1 = m_2$.

(2) $\rho(m_1, m_2) = \rho(m_2, m_1)$.

(3) $\rho(m_1, m_3) \leq \rho(m_1, m_2) + \rho(m_2, m_3)$.

Aplicaţia ρ se numeşte o metrică pe M.

2.2 Definitie. Fie (M, ρ) un spaţiu metric. Dat un punct $m_o \in M$ şi $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, mulţimea

$$B_\rho(m_o, a) = \{ m \mid m \in M \text{ şi } \rho(m, m_o) < a \}$$

se numeşte celula "deschisă" cu centrul în m_o şi raza a, iar mulţimea

$$\overline{B}_\rho(m_o, a) = \{ m \mid m \in M \text{ şi } \rho(m, m_o) \leq a \}$$

se numeşte celula "închisă" cu centrul în m_o şi raza a. Uneori

în loc de celulă vom spune şi disc.

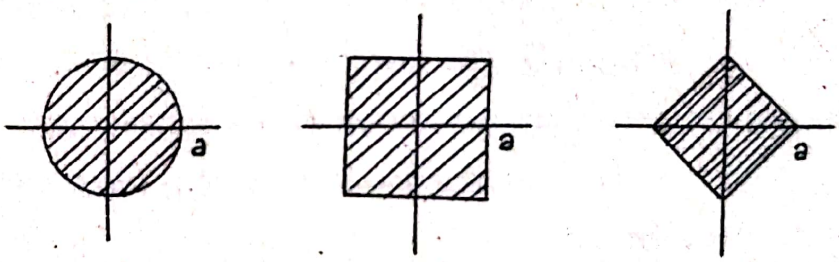
Exemplu. Fie $M=\mathbb{R}^2$. Să definim pe M trei metrici ρ_1, ρ_2, ρ_3 după cum urmează: pentru orice $p_1=(x_1,y_1)$, $p_2=(x_2,y_2) \in M$,

$$\rho_1(p_1,p_2)=\left[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\right]^{1/2},$$

$$\rho_2(p_1,p_2)=\max\left\{|x_2-x_1|,|y_2-y_1|\right\},$$

$$\rho_3(p_1,p_2)=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|.$$

Celulele deschise cu centrul în $O=(o,o)$ şi raza $a>o$ în raport cu fiecare din aceste trei metrici sînt indicate de porţiunile haşurate din figura alăturată.



$B_{\rho_1}(0,a)$ $B_{\rho_2}(0,a)$ $B_{\rho_3}(0,a)$

2.3 Observaţie. Cele trei metrici definite mai sus înzestrează planul cu trei structuri distincte de spaţiu metric. Cu toate acestea, pentru studiul anumitor proprietăţi ale acestor spaţii, aceste metrici sînt într-un anumit sens echivalente. Astfel, de exemplu, să presupunem că dorim să stabilim dacă punctul $O=(o,o)$ este sau nu este un punct limită al unei submulţimi $A \subset M$ din spaţiul metric (M,ρ) unde $\rho=\rho_1, \rho_2$ sau ρ_3, adică dacă există sau nu un şir $\{a_n\}$ de puncte din A astfel încît pentru orice $\varepsilon>o$, există un număr natural N cu proprietatea $\rho(a_n,0)<\varepsilon$ pentru orice $n>N$. Se constată imediat că răspunsul la această întrebare este independent de oricare din cele trei metrici ρ_1, ρ_2,

ρ_3 definite mai sus ce ar fi utilizate drept ρ, adică dat $\varepsilon > 0$, există un astfel de N utilizînd $\rho_1 \Longleftrightarrow$ există un astfel de N utilizînd ρ_2, etc. In adevăr, n-avem decît să observăm că $\frac{1}{2}\rho_3 \leqslant \rho_2 \leqslant \rho_1 \leqslant \rho_3$. Răspunsul la problemă nu depinde de forma celulei de rază ε, ci doar de "bogăţia" ei sau "deschiderea" ei. Acesta este unul din motivele pentru care este convenabil să se pună în evidenţă acele proprietăţi ale unui spaţiu metric care sînt esenţiale pentru descrierea "deschiderii" şi să se utilizeze asemenea proprietăţi pentru a studia o structură mai abstractă, anume <u>structura topologică</u>.

2.4 <u>Definiţie.</u> Un spaţiu topologic este un ansamblu $(X,\mathcal{T})$ format dintr-o mulţime X şi o familie $\mathcal{T}$ de submulţimi din X, adică $\mathcal{T} \subseteq 2^X$, ce satisface următoarele condiţii:

(1) $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$;

(2) Pentru orice $D_1, D_2 \in \mathcal{T}$, $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{T}$, adică intersecţia a orice două elemente din $\mathcal{T}$ aparţine lui $\mathcal{T}$;

(3) Pentru orice $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{T}$, $\bigcup_{D\in\mathcal{D}} D \in \mathcal{T}$, adică uniunea oricărei mulţimi de elemente din $\mathcal{T}$ aparţine lui $\mathcal{T}$.

Familia $\mathcal{T}$ se numeşte o <u>topologie</u> pe X, iar elementele lui $\mathcal{T}$ se numesc <u>mulţimile deschise</u> ale topologiei. Dacă $D \in \mathcal{T} \subseteq 2^X$ vom spune frecvent că D <u>este deschisă în X.</u>

2.5 <u>Observaţii</u> 1) Cînd nu este pericol de confuzie vom nota $(X,\mathcal{T})$ pur şi simplu cu X şi vom spune că X este un spaţiu topologic. In acest caz vom spune că mulţimile deschise din $\mathcal{T}$ sînt mulţimi deschise ale lui X.

2) Utilizînd metoda inducţiei, condiţia (2) din definiţia 2.4 implică imediat că orice intersecţie finită de elemente din $\mathcal{T}$ aparţine lui $\mathcal{T}$.

3) O mulţime X poate avea multe topologii. De exemplu, familia $\mathcal{T} = \{ \emptyset, X \}$ defineşte o topologie pe X, numită topologia trivială pe X. Familia $\mathcal{T} = 2^X$ defineşte o topologie pe X, numită topologia discretă pe X. In sfîrşit, familia $\mathcal{T} = \{ D \in 2^X \mid D = \emptyset, D = X, D' = C_X(D) \}$ este o mulţime finită defineşte o altă topologie pe X, numită topologia cofinită pe X.

4) Dacă $(X, \mathcal{T})$ este un spaţiu topologic, atunci o vecinătate deschisă a unui punct $x \in X$ este - prin definiţie - o mulţime deschisă $D \in \mathcal{T}$ astfel încît $x \in D$. Prin definiţie, o vecinătate a lui $x \in X$ este o submulţime (nevidă) a lui X ce conţine o vecinătate deschisă a lui x. Din aceste definiţii este clar că o mulţime deschisă este o vecinătate pentru fiecare din punctele sale.

5) Deoarece orice uniune de mulţimi deschise este deschisă, pentru orice $A \subseteq X$ putem considera uniunea mulţimilor deschise din X care sînt conţinute în A. Aceasta este cea mai mare submulţime deschisă a lui X conţinută în A numită interiorul lui A şi care se notează cu $\mathrm{Int}(A)$ sau $\mathrm{Int}_X(A)$. Prin urmare mulţimea A este deschisă dacă şi numai dacă $A = \mathrm{Int}(A)$. Se observă că putem defini o aplicaţie $\mathrm{Int}: 2^X \longrightarrow \mathcal{T} \subseteq 2^X$ ce ataşează mulţimii $A \subseteq X$ mulţimea $\mathrm{Int}(A) \subseteq X$, cu următoarele proprietăţi imediate:

(a) $\mathrm{Int}(X) = X$;

(b) $\mathrm{Int}(A) \subseteq A$. In particular, $\mathrm{Int}(\emptyset) = \emptyset$;

(c) $\mathrm{Int}\,(\mathrm{Int}\,A) = \mathrm{Int}\,A$;

(d) $\mathrm{Int}\,(A \cap B) = \mathrm{Int}\,A \cap \mathrm{Int}\,B \quad (B \subseteq X)$;

(e) Dacă $A \subseteq B \subseteq X$, atunci $\mathrm{Int}\,A \subseteq \mathrm{Int}\,B$;

(f) $\mathrm{Int}\,A \cup \mathrm{Int}\,B \subseteq \mathrm{Int}(A \cup B) \quad (B \subseteq X)$.

6) Dacă $(X, \mathcal{T})$ este un spaţiu topologic, mulţimea punctelor lui X care nu sînt interioare nici lui $A \subseteq X$ şi nici lui A' se numeşte frontiera lui A (în X) şi se notează $\mathrm{Fr}(A)$ sau $\mathrm{Fr}_X(A)$

Un punct $x \in Fr(A)$ dacă şi numai dacă orice mulţime deschisă $D \subseteq X$ astfel încît $x \in D$ se bucură de proprietatea $D \cap A \neq \emptyset$ şi $D \cap A' \neq \emptyset$. In particular, rezultă că $Fr_X(A) = Fr_X(A')$.

7) Pentru a arăta că o mulţime nevidă D este deschidă este suficient să arătăm că pentru fiecare $x \in D$, există o mulţime deschisă D_x astfel încît $x \in D_x \subseteq D$. In adevăr, dacă $x \in D_x$ (adică $\{x\} \subseteq D_x$) pentru fiecare $x \in D$, atunci $D \subseteq \bigcup_{x \in D} D_x$. Pe de altă parte, dacă $D_x \subseteq D$ pentru orice $x \in D$, atunci $\bigcup_{x \in D} D_x \subseteq D$, adică $D = \bigcup_{x \in D} D_x$ este o uniune de mulţimi deschise, deci deschisă.

Cu alte cuvinte o mulţime nevidă D este deschisă dacă şi numai dacă pentru fiecare punct $x \in D$ există o vecinătate deschisă a lui x conţinută în D.

2.6. Definiţie Fie $(X, \mathcal{T})$ un spaţiu topologic. O submulţime $A \subseteq X$ se numeşte închisă dacă $A' \in \mathcal{T}$.

2.7 Observaţii. 1) In baza definiţiei de mai sus, rezultă imediat că familia $\mathcal{C}$ a mulţimilor închise din spaţiul topologic $(X, \mathcal{T})$ satisface următoarele condiţii:

(1) $\emptyset \in \mathcal{C}$, $X \in \mathcal{C}$;

(2) Pentru orice $A_1, A_2 \in \mathcal{C}$, $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{C}$;

(3) Pentru orice $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$, $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \in \mathcal{C}$, adică intersecţia oricărei mulţimi de elemente din $\mathcal{C}$ aparţine lui $\mathcal{C}$.

2) O structură topologică pe o mulţime poate fi descrisă şi prin specificarea familiei mulţimilor închise. In adevăr, acest lucru este echivalent - modulo operaţia de considerare a complementarei - cu specificarea familiei mulţimilor deschise.

2.8 Propoziţie. Fie $(X, \mathcal{T})$ un spaţiu topologic, W şi Y două mulţimi, $g: W \longrightarrow X$ şi $f: X \longrightarrow Y$ două aplicaţii. Dacă definim familiile

$$\mathcal{S} = \left\{ S \mid S \in 2^W \text{ şi } (\exists D)(D \in \mathcal{T} \text{ şi } g^{-1}(D) = S) \right\} \subseteq 2^W$$

şi

$$\mathcal{U}=\left\{ U \mid U\in 2^{Y} \text{ şi } f^{-1}(U)\in \mathcal{T} \right\} \subseteq 2^{Y},$$

atunci $\mathcal{S}$ (respectiv $\mathcal{U}$) este o topologie pe W (respectiv Y).

Demonstraţie. Pentru a dovedi că $\mathcal{S}$ (respectiv $\mathcal{U}$) este o topologie pe W (respectiv Y) vom utiliza proprietăţile (2) din 1.29.

Să observăm întîi că $\emptyset, W \in \mathcal{S}$, căci există $\emptyset, X\in\mathcal{T}$ astfel încît $g^{-1}(\emptyset)=\emptyset$, $g^{-1}(X)=W$. Dacă $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$, atunci există $D_1, D_2 \in \mathcal{T}$ astfel încît $g^{-1}(D_i)=S_i$, $i=1,2$. Prin urmare, $S_1 \cap S_2 = g^{-1}(D_1)\cap g^{-1}(D_2)=g^{-1}(D_1\cap D_2)$, adică $S_1\cap S_2\in\mathcal{S}$, căci $D_1\cap D_2\in\mathcal{T}$. In sfîrşit, dacă $\tilde{\mathcal{S}}\subseteq\mathcal{S}$, atunci pentru orice $S\in\tilde{\mathcal{S}}$ există $D_S\in\mathcal{T}$ cu proprietatea $g^{-1}(D_S)=S$, aşa încît $\bigcup_{S\in\tilde{\mathcal{S}}} S = \bigcup_{S\in\tilde{\mathcal{S}}} g^{-1}(D_S) = g^{-1}\left(\bigcup_{S\in\tilde{\mathcal{S}}} D_S\right)$.

Similar, $\emptyset, Y\in\mathcal{U}$ căci $f^{-1}(\emptyset)=\emptyset\in\mathcal{T}$ şi $f^{-1}(Y)=X\in\mathcal{T}$. Dacă $U_1, U_2\in\mathcal{U}$, atunci $U_1\cap U_2\in\mathcal{U}$ căci $f^{-1}(U_1\cap U_2)=f^{-1}(U_1)\cap f^{-1}(U_2)\in\mathcal{T}$. In sfîrşit, dacă $\tilde{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{U}$, atunci $\bigcup_{U\in\tilde{\mathcal{U}}} U \in \mathcal{U}$, deoarece $f^{-1}\left(\bigcup_{U\in\tilde{\mathcal{U}}} U\right)=\bigcup_{U\in\tilde{\mathcal{U}}} f^{-1}(U)\in\mathcal{T}$.

Q. E. D.

2.9 Definiţie. Topologia $\mathcal{S}$ (respectiv $\mathcal{U}$) din propoziţia precedentă se numeşte topologia indusă de topologia $\mathcal{T}$ prin intermediul aplicaţiei g (respectiv f). Se mai spune că $\mathcal{S}$ este contraimaginea topologiei $\mathcal{T}$ prin aplicaţia g şi că $\mathcal{U}$ este imaginea topologiei $\mathcal{T}$ prin aplicaţia f.

2.10 Definiţie. Fie $(X,\mathcal{T})$ un spaţiu topologic şi $S\in 2^X$ o submulţime a lui X. Topologia indusă de $\mathcal{T}$ pe S prin intermediul aplicaţiei de incluziune $i:S\subset X$ (v.28) se numeşte topologia indusă de $\mathcal{T}$ pe S sau topologia relativă pe S

şi se notează cu $\mathcal{T}_S$. Dacă $(X,\mathcal{T})$ este un spaţiu topologic, $S\in 2^X$ şi S este dotat cu topologia $\mathcal{T}_S$, atunci se mai spune că S este un subspaţiu topologic al lui X.

Deoarece pentru orice $D\in\mathcal{T}$, $i^{-1}(D)=S\cap D$, rezultă

$$\mathcal{T}_S=\{S\cap D \mid D\in\mathcal{T}\}.$$

Observaţie. Atunci cînd se operează cu submulţimi dintr-un spaţiu topologic trebuie specificat în orice moment topologia utilizată. De exemplu, fie $X=\mathbb{R}$, $S=[1,3]\subset\mathbb{R}$ şi $D=(0,2)$. Atunci conform definiţiei topologiei relative, $S\cap D=[1,2)$ este deschisă în S, dar nu este deschisă în R cu topologia obişnuită.

In legătură cu această observaţie putem însă preciza următorul rezultat.

2.11 Propoziţie. Fie $(X,\mathcal{T})$ un spaţiu topologic şi $S\subseteq X$. Dacă $S\in\mathcal{T}$, atunci o mulţime din 2^S aparţine lui $\mathcal{T}_S$ dacă şi numai dacă aparţine şi lui $\mathcal{T}$, adică dacă S este deschisă în X, atunci o mulţime $B\in 2^S$ este deschisă în S dacă şi numai dacă $B=i_{B,X}(B)$ este deschisă şi în X. Similar, dacă S este închisă în X, atunci o mulţime $B\in 2^S$ este închisă în S dacă şi numai dacă $B=i_{B,X}(B)$ este închisă şi în X.

Demonstraţie. Dacă $B\in\mathcal{T}_S$, atunci există $D\in\mathcal{T}$ astfel încît $B=S\cap D$ şi cum $S\in\mathcal{T}$ urmează că $B=i_{B,X}(B)\in\mathcal{T}$. Reciproc, dacă $B\in 2^S$ şi $B=i_{B,X}(B)\in\mathcal{T}$, atunci $B=S\cap B\in\mathcal{T}_S$. Dacă S este închisă în X şi $B\in 2^S$ este închisă în S, atunci $C_S(B)$ este deschisă în S, deci există $D\in\mathcal{T}$ astfel încît $C_S(B)=S\cap D$. Putem scrie atunci

$$i_{B,X}(B)=B=C_S(C_S(B))=C_S(S\cap D)=S\cap C_X(D)$$

şi deci $i_{B,X}(B)$ este închisă în X, deoarece B este intersecţia a două mulţimi închise în X. Reciproc, fie $B\in 2^S$ şi $B=i_{B,X}(B)$

închisă în X. Atunci $C_S(B)=S\cap C_X(B)\in\mathcal{T}_S$, adică B este închisă în S.

Q. E. D.

2.12 Propoziţie. Fie $(X,\mathcal{T})$ un spaţiu topologic şi fie $Q\subseteq X$ cu topologia relativă $\mathcal{T}_Q$. Dacă $P\subseteq Q$, atunci $(\mathcal{T}_Q)_P=\mathcal{T}_P$, adică topologia indusă de $\mathcal{T}_Q$ pe P coincide cu topologia indusă de $\mathcal{T}$ pe P = $=i_{P,X}(P)$.

Demonstraţie. Fie $B\subseteq P$. Atunci

$B\in(\mathcal{T}_Q)_P \Leftrightarrow B=P\cap U$, unde $U\in\mathcal{T}_Q \Leftrightarrow$

$B=P\cap(Q\cap D)=(P\cap Q)\cap D$, unde $D\in\mathcal{T} \Leftrightarrow$

$B=P\cap D$ (căci $P\subseteq Q$), unde $D\in\mathcal{T} \Leftrightarrow B\in\mathcal{T}_P$.

Q. E. D.

2.13 Observaţie. Una din afirmaţiile cuprinse în 2.8 se poate generaliza imediat pentru o familie arbitrară $\{(X_t,\mathcal{T}_t)\}_{t\in T}$ de spaţii topologice şi o familie arbitrară $\{f_t:X_t\longrightarrow Y\}_{t\in T}$ de aplicaţii, unde Y este o mulţime. Anume

$$\mathcal{U}=\{U \mid U\in 2^Y \text{ şi } f_t^{-1}(U)\in\mathcal{T}_t,\ \forall t\in T\}$$

este o topologie pe Y indusă prin intermediul familiei de aplicaţii $\{f_t\}_{t\in T}$. Topologia $\mathcal{U}$ se numeşte <u>imaginea familiei de topologii</u> $\{\mathcal{T}_t\}_{t\in T}$ <u>prin familia de aplicaţii</u> $\{f_t\}_{t\in T}$.

Sensul în care poate fi generalizată şi cealaltă afirmaţie conţinută în 2.8 pentru o familie arbitrară $\{g_t:W\longrightarrow X_t\}_{t\in T}$ de aplicaţii, unde W este o mulţime, va fi precizat ceva mai tîrziu (v.2.64).

Fie $\{(X_t,\mathcal{T}_t)\}_{t\in T}$ o familie arbitrară de spaţii topologice. Notăm cu $X_t^*=X_t\times\{t\}=\{(x,t)\mid x\in X_t\}$. Se observă imediat că dacă $t,s\in T$ şi $t\neq s$, atunci $X_t^*\cap X_s^*=\emptyset$. Notăm cu

$\coprod_{t\in T} X_t$ mulţimea $\bigcup_{t\in T} X_t^*$, numită şi <u>reuniunea disjunctă</u> a familiei $(X_t)_{t\in T}$. Pentru orice $t\in T$, definim aplicaţia

$$i_t : X_t \longrightarrow \coprod_{t\in T} X_t$$

prin $i_t(x)=(x,t)$, unde $x\in X_t$. Pentru orice $t\in T$, i_t este o aplicaţie injectivă. Să observăm că au loc egalităţile

(*) $i_t(X_t) \cap i_s(X_s) = \emptyset$, oricare ar fi $t \neq s$;

(**) $$\coprod_{t\in T} X_t = \bigcup_{t\in T} i_t(X_t).$$

2.14 <u>Definiţie</u>. Spaţiul topologic $(\coprod_{t\in T} X_t, \mathcal{U})$, unde

$$\mathcal{U} = \left\{ U \mid U \subseteq \coprod_{t\in T} X_t \text{ şi } i_t^{-1}(U) \in \mathcal{T}_t, \forall t \in T \right\}$$

se numeşte <u>suma</u> (directă) <u>spaţiilor topologice</u> $\{(X_t, \mathcal{T}_t)\}_{t\in T}$.

2.15 <u>Observaţie.</u> Deoarece pentru orice $t\in T$, i_t este injectivă, rezultă $i_t^{-1}(i_t(X_t))=X_t$ [v. 1.29,(6),b], adică $i_t(X_t)$ este o mulţime deschisă din $\coprod_{t\in T} X_t$. Pe de altă parte în baza relaţiilor (*) şi (**) de mai sus, complementara lui $i_t(X_t)$ în $\coprod_{t\in T} X_t$ coincide cu reuniunea $\bigcup_{s\in T\setminus\{t\}} i_s(X_s)$, deci este deschisă, adică $i_t(X_t)$ este şi o mulţime închisă. Deci oricare ar fi $t\in T$, mulţimile $i_t(X_t)$ sînt şi deschise şi închise.

2.16 <u>Definiţie</u>. Fie $(X,\mathcal{T})$ un spaţiu topologic şi $S\subseteq X$. Un punct $x\in X$ se numeşte <u>punct de acumulare</u> (sau <u>punct limită</u>) pentru S dacă pentru fiecare $D\in\mathcal{T}$ astfel încît $x\in D$, $(D\setminus\{x\})\cap S \neq \emptyset$. Un punct $x\in X$ se numeşte <u>punct aderent</u> pentru S dacă pentru fiecare $D\in\mathcal{T}$ astfel încît $x\in D, D\cap S \neq \emptyset$.

2.17 <u>Observaţii</u>. 1) Orice punct de acumulare pentru S este un punct aderent pentru S.

2) Orice punct aderent pentru S, dar care nu aparţine lui S, este un punct de acumulare pentru S.

3) Dacă $x \in S$ şi x nu este un punct de acumulare pentru S, atunci x se numeşte punct izolat al lui S.

2.18 Definiţie. Dacă $S \subseteq X$, atunci închiderea lui S, notată cu $\bar{S}$, este mulţimea definită de egalitatea:

$$\bar{S} = S \cup \{ x \mid x \in X \text{ şi } x \text{ este un punct de acumulare pentru } S \}.$$

2.19 Observaţii 1) Inchiderea lui S coincide cu mulţimea tuturor punctelor aderente pentru S.

2) Dacă $S \subseteq X$, atunci în baza definiţiilor de mai sus pentru interior şi închidere are loc egalitatea:

$$\mathrm{Int}(S) = \{ s \mid s \in S \text{ şi } s \bar{\in} (\overline{S'}) \} = \{ s \mid s \in S \text{ şi } s \text{ nu este un punct de acumulare pentru } S' \} = C_X((\overline{S'})).$$

Prin urmare are loc şi egalitatea: $(\mathrm{Int}(S))' = (\overline{S'})$.

3) Dualizînd ultimele două egalităţi în sensul operaţiei de luare a complementarei se obţin imediat şi următoarele relaţii

$$\bar{S} = C_X(\mathrm{Int}\, C_X(S)) \quad \text{şi} \quad C_X(\bar{S}) = \mathrm{Int}\,(C_X(S)).$$

4) Ţinînd seama de observaţia precedentă, de definiţia 2.6 şi de observaţia 2.5,5), rezultă imediat că închiderea $\bar{S}$ a lui $S \subseteq X$ este închisă în X: $C_X(\bar{S}) = \mathrm{Int}(C_X(S)) \in \mathcal{T}$.

5) Dualizînd în sensul teoriei mulţimilor proprietăţile (a)-(f) din 2.5,5), obţinem următoarele proprietăţi ale închiderii, considerată ca aplicaţie de la 2^X pe $\mathcal{C} \subseteq 2^X$:

(a') $\bar{\emptyset} = \emptyset$;

(b') $S \subseteq \bar{S}$. In particular, $X = \bar{X}$;

(c') $\bar{\bar{S}} = \bar{S}$;

(d') $\overline{R \cup S} = \bar{R} \cup \bar{S}$ $(R \subseteq X)$;

(e') Dacă $R \subseteq S \subseteq X$, atunci $\bar{R} \subseteq \bar{S}$;

(f') $\overline{R \cap S} \subseteq \bar{R} \cap \bar{S}$ $(R \subseteq X)$.

6) Dacă $S \subseteq X$, atunci o condiţie necesară şi suficientă ca S să fie o mulţime închisă a spaţiului topologic $(X, \mathcal{T})$ este ca $S=\bar{S}$. In adevăr,

S' este deschisă $\Longleftrightarrow$ $S' = \mathrm{Int}(S') \Longleftrightarrow S = C_X(\mathrm{Int}(S'))$

$\Longleftrightarrow S=\bar{S}$ [v.şi observaţia 3) de mai sus] .

7) Inchiderea $\bar{S}$ poate fi de asemenea caracterizată ca fiind intersecţia tuturor mulţimilor închise ce conţin pe S. In adevăr, acest fapt este o consecinţă imediată a egalităţii $\bar{S} = C_X(\mathrm{Int}\, C_X(S))$ şi a definiţiei interiorului unei mulţimi v.2.5,5) Prin urmare, închiderea $\bar{S}$ a lui S este cea mai mică mulţime închisă din $(X, \mathcal{T})$ ce conţine pe S.

8) Dacă $(X,\mathcal{T})$ este un spaţiu topologic, pentru orice $A \subset X$ $\mathrm{Fr}(A)=\bar{A} \cap \bar{A}'$, egalitate ce arată că $\mathrm{Fr}(A)$ este închisă.

Să observăm că dacă A este închisă, atunci $\mathrm{Fr}(A) \subseteq A$, deoarece $\mathrm{Fr}(A) \subseteq \bar{A} = A$. Dacă A este închisă şi $\mathrm{Int}(A)= \emptyset$, atunci $A=\mathrm{Fr}(A)$. In adevăr, $\overline{C_X(A)} = C_X(\mathrm{Int}(A)) = C_X(\emptyset)=X$, aşa încît $\mathrm{Fr}(A) = \overline{C_X(A)} \cap \bar{A} = X \cap \bar{A} = \bar{A} = A$.

2.20. Definiţie. Fie $(X, \mathcal{T})$ un spaţiu topologic. O mulţime $A \subseteq X$ se numeşte densă în X dacă $\bar{A} = X$.

2.21 Observaţie. O mulţime $A \subseteq X$ este densă în $X \Longleftrightarrow$ $A \cap D \neq \emptyset$, $\forall D \in \mathcal{T}$, $D \neq \emptyset \Longleftrightarrow$ $\mathrm{Int}(A') = \emptyset$ [v.şi 2.19, 3)] .

2.22 Definiţie. Un spaţiu topologic $(X, \mathcal{T})$ se numeşte separabil dacă există o mulţime finită sau numărabilă $A \subseteq X$ densă în X.

De exemplu, $\mathbb{R}^n$ cu topologia obişnuită este un spaţiu

topologic separabil, deoarece mulţimea $\mathbb{Q}^n$ a punctelor de coordonate raţionale este numărabilă şi densă în $\mathbb{R}^n$.

2.23 Definiţie. Fie $(X, \mathcal{T})$ un spaţiu topologic. O submulţime $A \subset X$ se numeşte nicăieri densă sau rară dacă $\operatorname{Int}\bar{A} = \emptyset$, adică $\bar{A}$ nu conţine nici o mulţime deschisă nevidă.

Exeemple 1) Dacă A este o mulţime deschisă sau închisă din X, atunci mulţimea închisă Fr(A) este rară. In adevăr, frontiera unei asemenea mulţimi nu posedă puncte interioare: dacă A este deschisă,

$$\operatorname{Int}(\operatorname{Fr}(A)) = \operatorname{Int}(\bar{A}) \cap \operatorname{Int}(A') = \operatorname{Int}(\bar{A}) \cap C_X(\bar{A}) \subseteq \bar{A} \cap C_X(\bar{A}) = \emptyset$$

[v 2.19,8); 2.5,5),(d); 2.19,6) şi 2.19,3)];

dacă A este închisă,

$$\operatorname{Int}(\operatorname{Fr}(A)) = \operatorname{Int}A \cap \operatorname{Int}(\bar{A}') = C_X((\bar{A}')) \cap \operatorname{Int}(\bar{A}') \subseteq$$

$$\subseteq C_X((\bar{A}')) \cap (\bar{A}') = \emptyset \quad .$$

2) Reamintim că o submulţime din $\mathbb{R}^n$ are măsura zero dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există o acoperire finită sau numărabilă a submulţimii cu "cuburi" închise (cu muchiile paralele cu axele de coordonate) de volum total mai mic decît ε. Orice uniune finită sau numărabilă de mulţimi de măsură zero este din nou de măsură zero. Se poate demonstra că o submulţime închisă din $\mathbb{R}^n$ de măsură egală cu zero este rară în $\mathbb{R}^n$.

Pentru alte exemple, v.5.48.

2.24 Observaţii. 1) Orice submulţime a unei mulţimi rare este rară.

In adevăr, dacă $B \subseteq A$ şi A este rară în X, atunci $\bar{B} \subseteq \bar{A}$, deci $\operatorname{Int}(\bar{B}) \subseteq \operatorname{Int}(\bar{A}) = \emptyset$, ceea ce implică $\operatorname{Int}(\bar{B}) = \emptyset$.

2) Dacă $A \subset X$ este rară, atunci şi $\bar{A}$ este rară.

In adevăr, $\emptyset = \operatorname{Int}(\bar{A}) = \operatorname{Int}(\bar{\bar{A}})$ [v.2.19,5),(c')].

3) $A \subset X$ este rară dacă şi numai dacă $(\bar{A})'$ este densă în X.

In adevăr, această afirmaţie este o consecinţă imediată a lui 2.21.

4) Orice uniune finită de mulţimi rare este rară.

In adevăr, este suficient să verificăm această afirmaţie pentru cazul a două mulţimi închise rare: dacă A_1 şi $A_2 \subset X$ sînt rare, atunci $\bar{A}_1$ şi $\bar{A}_2$ sînt rare [v.observaţia 2) de mai sus] şi

$$A_1 \cup A_2 \subseteq \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \quad [\text{v.2.19,5),(b')}],$$

aşa încît este suficient să dovedim că $\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2$ este rară [v.observaţia 1) de mai sus]. Acest fapt este echivalent cu afirmaţia duală: intersecţia a două mulţimi deschise D_1 şi D_2 dense în X este densă în X. In adevăr, dacă D este o mulţime deschisă nevidă arbitrară, atunci $D_2 \cap D$ este deschisă şi nevidă deoarece D_2 este densă în X (v.221). Dar atunci şi $\emptyset \neq D_1 \cap (D_2 \cap D) = (D_1 \cap D_2) \cap D$ căci D_1 este densă în X, adică $D_1 \cap D_2$ este densă în X.

5) O uniune numărabilă de mulţimi rare poate să nu mai fie o mulţime rară. Să considerăm de exemplu X=R cu topologia obişnuită şi mulţimea

$$\mathbb{Q} = \{ r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots \}$$

a numerelor raţionale. Dacă notăm:

$$\mathbb{Q}_n = \{ r_1, r_2, \ldots, r_n \}, \quad n=1,2,\ldots,$$

atunci mulţimile închise $\mathbb{Q}_n$ sînt rare căci fiecare mulţime $\{ r_i \}$ $(i=1,\ldots,n)$ este rară [v.observaţia 4) de mai sus]. Dar

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}_n$$

nu este rară, căci $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

2.25 Definiţie. O submulţime dintr-un spaţiu topologic X se numeşte de prima categorie (după René Baire) sau slabă dacă ea este o uniune numărabilă de mulţimi rare. Orice mulţime din X care nu este de prima categorie se numeşte (tot după R.Baire) o mulţime de categoria a doua în X. O mulţime din X se numeşte un rezidual dacă ea este o intersecţie numărabilă de mulţimi deschise dense în X.

De exemplu, $\mathbb{Q}$ este slabă în $\mathbb{R}$.

2.26 Observaţii. 1) Orice parte a unei mulţimi slabe este slabă.

2) Orice uniune finită sau numărabilă de mulţimi slabe este slabă.

2.27 Propoziţie. Fie $(X, \mathcal{T})$ un spaţiu topologic. Următoarele proprietăţi sînt echivalente.

(a) Orice rezidual din X este dens în X.

(b) Orice mulţime slabă din X are interiorul vid.

(c) Singura mulţime deschisă slabă din X este mulţimea vidă.

(d) Pentru orice mulţime slabă din X, complementara sa este densă în X.

Demonstraţie. Considerînd operaţia de luare a complementarei, afirmaţia (a) este echivalentă cu afirmaţia:

(b') Orice uniune numărabilă de mulţimi închise rare din X are interiorul vid.

La prima aparenţă, (b') este un caz particular al lui (b), adică (b) $\Rightarrow$ (b'), dar de fapt (b) $\Leftrightarrow$ (b'). In adevăr, fie $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o familie numărabilă de mulţimi rare din X. Atunci $\{\overline{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ este o familie numărabilă de mulţimi închise şi rare din X [v.2.24,2)] şi deci în baza lui (b'), $\mathrm{Int}(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n) = \emptyset$.

Dar

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n \quad [v.2.19,5),(b')] \text{ , aşa încît}$$

$$\text{Int}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \subseteq \text{Int}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n\right) \quad [v.2.5,5),\ (e)] \text{ ,}$$

ceea ce implică $\text{Int}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \emptyset$.

Echivalenţa (b) $\Longleftrightarrow$ (d) este o consecinţă imediată a lui 2.21).

Implicaţia (b) $\Longrightarrow$ (c) este trivială. Vom demonstra acum că $(\overline{b}) \Longrightarrow (\overline{c})$. Fie deci $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o familie numărabilă de mulţimi rare din X asfel încît există $x \in \text{Int}(A)$, unde $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Atunci există o mulţime deschisă nevidă $D \subset X$ astfel încît $x \in D \subset A$ Mulţimile $A_n \cap D$ sînt rare [v.2.24,1)] şi $D = A \cap D = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap D = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap D)$ este slabă şi nevidă. Q.E.D.

2.28 <u>Definiţie</u>. Un spaţiu topologic $(X, \mathcal{T})$ se numeşte <u>spaţiu Baire</u> dacă este satisfăcută una (deci oricare) din proprietăţile din propoziţia precedentă.

2.29 <u>Propoziţie</u>. Orice submulţime deschisă a unui spaţiu Baire este un spaţiu Baire în topologia relativă.

<u>Demonstraţie</u>. Fie D o mulţime deschisă din spaţiul topologic X. Vom demonstra că dacă A este o mulţime rară din D, (cu topologia relativă), atunci A este rară în X. Fie $\bar{A}$ închiderea lui A în X şi $B = \text{Int}_X(\bar{A})$. $D \cap B$ este o submulţime deschisă din D ce conţine numai puncte aderente ale lui A în D, şi cum A este rară în D, $D \cap B = \emptyset$, ceea ce este echivalent cu $D \subseteq C_X(B)$. Deoarece $C_X(B)$ este închisă în X, $\bar{A} \subseteq \bar{D} \subseteq C_X(B)$ [v.2.19,5), (e') şi 2.19,6)] şi deoarece $B \subset \bar{A}$, rezultă $B = \emptyset$, adică A este rară în X. Prin urmare orice mulţime din D care este slabă în D este slabă şi în X. Deoarece D este deschisă în X, orice mulţime deschisă din D cu topologia relativă este deschisă şi în X (v.2.11). Propoziţia este atunci

o consecinţă imediată a propritătii (c) din 2.27.

Q. E. D.

Compararea topologiilor

2.30. Definiţie. Fie X o mulţime, $\mathcal{T}$ şi $\mathcal{U}$ două topologii pe X. Topologia $\mathcal{T}$ se zice mai slabă decît $\mathcal{U}$ sau că $\mathcal{U}$ este mai tare decît $\mathcal{T}$ dacă $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{U}$. Dacă $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{U}$ se mai zice că $\mathcal{T}$ este mai puţin fină decît $\mathcal{U}$ sau că $\mathcal{U}$ este mai fină decît $\mathcal{T}$.

2.31. Observaţii. 1) Topologia trivială $\{\emptyset, X\}$ pe X este mai puţin fină decît orice altă topologie $\mathcal{T}$ pe X, căci $\{\emptyset, X\} \subseteq \mathcal{T}$. Topologia discretă 2^X pe X este mai fină decît orice altă topologie $\mathcal{T}$ pe X, căci $\mathcal{T} \subseteq 2^X$.

2) Dacă $\mathcal{A}$ este o colecţie (nevidă) de topologii pe X, atunci $\bigcap_{\mathcal{T}\in\mathcal{A}} \mathcal{T}$ este o topologie pe X mai puţin fină decît fiecare topologie $\mathcal{T} \in \mathcal{A}$. In adevăr, $\mathcal{S} = \bigcap_{\mathcal{T}\in\mathcal{A}} \mathcal{T}$ satisface condiţiile (1)-(3) din 2.4. Astfel, $\emptyset, X \in \mathcal{S}$ căci $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ pentru orice $\mathcal{T} \in \mathcal{A}$. Dacă $D_1, D_2 \in \mathcal{S}$, atunci $D_1, D_2 \in \mathcal{T}$ pentru fiecare $\mathcal{T} \in \mathcal{A}$, deci $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{T}$ pentru fiecare $\mathcal{T} \in \mathcal{A}$ şi prin urmare $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{S}$. Dacă $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{S}$, atunci $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{T}$ pentru fiecare $\mathcal{T} \in \mathcal{A}$, deci $\bigcup_{D\in\mathcal{D}} D \in \mathcal{T}$ pentru fiecare $\mathcal{T} \in \mathcal{A}$ şi prin urmare $\bigcup_{D\in\mathcal{D}} D \in \mathcal{S}$. In sfîrşit, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ pentru orice $\mathcal{T} \in \mathcal{A}$.

2.32 Propozitie. Fie X o mulţime şi $\mathcal{M} \subseteq 2^X$. Atunci există o topologie $\mathcal{U}$ pe X astfel încît $\mathcal{U}$ este cea mai puţin fină topologie pe X ce conţine pe $\mathcal{M}$.

Demonstraţie. Fie

$$\mathcal{A} = \{\mathcal{T} \mid \mathcal{M} \subseteq \mathcal{T} \subseteq 2^X \text{ şi } \mathcal{T} \text{ este o topologie pe } X\}.$$

Atunci $2^X \in \mathcal{A}$, aşa încît $\mathcal{A} \neq \emptyset$. In baza lui 2.31,2),

o consecinţă imediată a propritătii (c) din 2.27.

Q. E. D.

Compararea topologiilor

2.30. Definiţie. Fie X o mulţime, $\mathcal{T}$ şi $\mathcal{U}$ două topologii pe X. Topologia $\mathcal{T}$ se zice mai slabă decît $\mathcal{U}$ sau că $\mathcal{U}$ este mai tare decît $\mathcal{T}$ dacă $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{U}$. Dacă $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{U}$ se mai zice că $\mathcal{T}$ este mai puţin fină decît $\mathcal{U}$ sau că $\mathcal{U}$ este mai fină decît $\mathcal{T}$.

2.31. Observaţii. 1) Topologia trivială $\{\emptyset, X\}$ pe X este mai puţin fină decît orice altă topologie $\mathcal{T}$ pe X, căci $\{\emptyset, X\} \subseteq \mathcal{T}$. Topologia discretă 2^X pe X este mai fină decît orice altă topologie $\mathcal{T}$ pe X, căci $\mathcal{T} \subseteq 2^X$.

2) Dacă $\mathcal{A}$ este o colecţie (nevidă) de topologii pe X, atunci $\bigcap_{\mathcal{T}\in\mathcal{A}} \mathcal{T}$ este o topologie pe X mai puţin fină decît fiecare topologie $\mathcal{T} \in \mathcal{A}$. In adevăr, $\mathcal{S} = \bigcap_{\mathcal{T}\in\mathcal{A}} \mathcal{T}$ satisface condiţiile (1)-(3) din 2.4. Astfel, $\emptyset, X \in \mathcal{S}$ căci $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ pentru orice $\mathcal{T} \in \mathcal{A}$. Dacă $D_1, D_2 \in \mathcal{S}$, atunci $D_1, D_2 \in \mathcal{T}$ pentru fiecare $\mathcal{T} \in \mathcal{A}$, deci $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{T}$ pentru fiecare $\mathcal{T} \in \mathcal{A}$ şi prin urmare $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{S}$. Dacă $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{S}$, atunci $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{T}$ pentru fiecare $\mathcal{T} \in \mathcal{A}$, deci $\bigcup_{D\in\mathcal{D}} D \in \mathcal{T}$ pentru fiecare $\mathcal{T} \in \mathcal{A}$ şi prin urmare $\bigcup_{D\in\mathcal{D}} D \in \mathcal{S}$. In sfîrşit, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ pentru orice $\mathcal{T} \in \mathcal{A}$.

2.32 Propoziţie. Fie X o mulţime şi $\mathcal{M} \subseteq 2^X$. Atunci există o topologie $\mathcal{U}$ pe X astfel încît $\mathcal{U}$ este cea mai puţin fină topologie pe X ce conţine pe $\mathcal{M}$.

Demonstraţie. Fie

$$\mathcal{A} = \{\mathcal{T} \mid \mathcal{M} \subseteq \mathcal{T} \subseteq 2^X \text{ şi } \mathcal{T} \text{ este o topologie pe } X\}.$$

Atunci $2^X \in \mathcal{A}$, aşa încît $\mathcal{A} \neq \emptyset$. In baza lui 2.31,2),

$\mathcal{U} = \bigcap_{\mathcal{T} \in \mathcal{A}} \mathcal{T}$ este o topologie pe X ce se bucură evident de proprietatea $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{M}$, $\mathcal{U}$ este cea mai puţin fină topologie pe X ce conţine pe $\mathcal{M}$, deoarece dacă $\mathcal{S}$ este orice altă topologie pe X astfel încît $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{S}$, atunci $\mathcal{S} \in \mathcal{A}$ şi deci $\mathcal{U} = \bigcap_{\mathcal{T} \in \mathcal{A}} \mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$.

Q. E. D.

Bază pentru o topologie

O topologie pe o mulţime X poate fi reconstituită dacă se cunoaşte o parte suficient de semnificativă a ei. Metode de reconstituire vor fi date la 2.34 şi 2.38.

2.33 Definiţie. Fie X o mulţime. O familie $\mathcal{B} \subset 2^X$ este o bază pentru o topologie pe X dacă următoarele condiţii sînt satisfăcute:

(1) $\emptyset \in \mathcal{B}$;

(2) $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$;

(3) Dacă $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, atunci $B_1 \cap B_2 = \bigcup_{B \in \widetilde{\mathcal{B}}} B$, unde $\widetilde{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{B}$.

2.34 Propoziţie. Fie X o mulţime. Dacă $\mathcal{B}$ este o bază pentru o topologie pe X, atunci

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \left\{ D \mid D \in 2^X \text{ şi } (\exists \widetilde{\mathcal{B}})(\widetilde{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{B} \text{ şi } D = \bigcup_{B \in \widetilde{\mathcal{B}}} B) \right.$$

este o topologie pe X, numită topologia generată de baza $\mathcal{B}$.

Inainte de a demonstra această afirmaţie să facem următoarele observaţii ce rezultă imediat din definiţia bazei şi a

lui $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

2.35 Observaţii. 1) $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, adică elementele familiei aparţin topologiei generate de $\mathcal{B}$;

2) $X \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$

3) Dacă $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, atunci $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$

4) Propoziţia 2.34 admite următoarea reciprocă imediată: Dacă $(X, \mathcal{T})$ este un spaţiu topologic şi $\mathcal{B}$ este o familie de mulţimi din $\mathcal{T}$ (adică o familie de mulţimi deschise din X) astfel încît $\emptyset \in \mathcal{B}$ şi pentru fiecare mulţime nevidă D din $\mathcal{T}$ există o subfamilie $\widetilde{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{B}$ cu proprietatea că D este uniunea mulţimilor din $\widetilde{\mathcal{B}}$, atunci $\mathcal{B}$ este o bază pentru o topologie pe X, anume topologia generată de $\mathcal{B}$ va coincide în mod evident cu $\mathcal{T}$.

Demonstraţia Propoziţiei 2.34. Trebuie să verificăm că $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ satisface condiţiile (1)-(3) din 2.4. Deoarece $\emptyset \in \mathcal{B}$ şi $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ rezultă $\emptyset \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Pe de altă parte, am observat deja că $X \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Să presupunem acum că $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Atunci pentru fiecare $D \in \mathcal{D}$ există $\mathcal{B}_D \subseteq \mathcal{B}$ astfel încît $D = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_D} B$. Prin urmare, $\bigcup_{D \in \mathcal{D}} D = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} \left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}_D} B \right) = \bigcup_{B \in \widetilde{\mathcal{B}}} B$, unde $\widetilde{\mathcal{B}} = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} \mathcal{B}_D \subseteq \mathcal{B}$, ceea ce implică apartenenţa $\bigcup_{D \in \mathcal{D}} D \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, adică condiţia (3) din 2.4 este îndeplinită. Să verificăm acum condiţia (2) din 2.4. Dacă $D_1, D_2 \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, atunci există $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}$ şi $\mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{B}$ astfel încît $D_1 = \bigcup_{B_1 \in \mathcal{B}_1} B_1$ şi $D_2 = \bigcup_{B_2 \in \mathcal{B}_2} B_2$. Deci în baza ultimei proprietăţi (9) din propoziţia 1.4 putem scrie

$$D_1 \cap D_2 = \left(\bigcup_{B_1 \in \mathcal{B}_1} B_1 \right) \cap \left(\bigcup_{B_2 \in \mathcal{B}_2} B_2 \right) = \bigcup_{\substack{B_1 \in \mathcal{B}_1 \\ B_2 \in \mathcal{B}_2}} (B_1 \cap B_2)$$

Dar în baza lui 2.35 3), $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, ceea ce, în baza faptu-

lui că orice uniune de elemente din $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ este tot în $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, atrage după sine apartenența $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

Q. E. D.

2.36 Propoziție. Dacă (M, ρ) este un spațiu metric, atunci

$$\mathcal{B} = \left\{ B_\rho(m,a) \mid m \in M \quad \text{și} \quad a \in \mathbb{R}_{\geq 0} \right\}$$

este o bază pentru o topologie pe M.

Demonstrație. Să verificăm condițiile (1)-(3) din 2.33. Deoarece $B_\rho(m,0) = \emptyset$ pentru orice $m \in M$, rezultă că $\emptyset \in \mathcal{B}$. Pe de altă parte, pentru orice $a > 0$, $m \in B_\rho(m,a) \subseteq M$, deci $M = \bigcup_{m \in M} B_\rho(m,a)$, așa încît cu atît mai mult $M = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$. In sfîrșit, fie $m_1, m_2 \in M$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ și fie $S = B_\rho(m_1,a_1) \cap B_\rho(m_2,a_2)$. Dacă $S = \emptyset$, atunci condiția (3) din 2.33 este automat îndeplinită. Să presupunem deci că $S \neq \emptyset$. Pentru a dovedi că S este o uniune de elemente din $\mathcal{B}$ este suficient să arătăm că pentru fiecare $s \in S$, există $a_s > 0$ astfel încît $B_\rho(s,a_s) \subseteq S$. In adevăr, atunci $S \subseteq \bigcup_{s \in S} B_\rho(s,a_s) \subseteq S$. Prima incluziune urmează din apartenența $s \in B_\rho(s,a_s)$ pentru orice $s \in S$, ceea ce este echivalent cu $\{ s \} \subseteq B_\rho(s,a_s)$ pentru orice $s \in S$. A doua incluziune urmează din $B_\rho(s,a_s) \subseteq S$ pentru orice $s \in S$. Deci $S = \bigcup_{s \in S} B_\rho(s,a_s)$ este o uniune de elemente din $\mathcal{B}$. Pentru $s \in S$, fie $b_i = \rho(m_i,s)$, $i=1,2$. Deoarece $s \in B(m_i,a_i)$, rezultă $b_i < a_i$, așa încît dacă definim $a_s = \min \{ a_1 - b_1, a_2 - b_2 \}$, atunci $a_s > 0$. Să dovedim $B(s,a_s) \subseteq S$. In adevăr, pentru orice $m \in B(s,a_s)$,

$$\rho(m_i,m) \leq \rho(m_i,s) + \rho(s,m) < b_i + a_s \leq b_i + a_i - b_i = a_i ,$$

adică $m \in B(m_i,a_i)$ pentru orice $i=1,2$ sau $m \in S$.

Q. E. D.

2.37 Corolar Pentru orice spațiu metric (M, ρ) există o

topologie canonică pe M:multimile deschise ale acestei topologii sînt uniuni de celule "deschise". In particular, orice celulă "deschisă" este o mulţime deschisă în această topologie [v.2.35, 1)] .

2.38 Propoziţie. Fie X o mulţime şi $\mathcal{M} \subseteq 2^X$. Atunci

$\mathcal{B} = \{ B \mid B = \emptyset$, sau $B=X$, sau $B=M_1 \cap \dots \cap M_k$, unde $M_i \in \mathcal{M}$, $i=1,\dots,k$, k fiind un număr natural $\geq 1 \}$ este o bază pentru o topologie pe X, anume topologia $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$ generată de $\mathcal{B}$ coincide cu cea mai puţin fină topologie $\mathcal{U}$ pe X ce conţine pe $\mathcal{M}$ (v. si 2.32).

Demonstraţie. Din definiţia lui $\mathcal{B}$ urmează imediat $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}$. De asemenea, din definiţia lui $\mathcal{B}$, condiţiile (1) şi (2) din 2.33 sînt automat satisfăcute. Condiţia (3) din 2.33 este şi ea satisfăcută: dacă B_1 şi $B_2 \in \mathcal{B}$, B_1 (respectiv B_2) fiind o intersecţie de k (respectiv ℓ) mulţimi din $\mathcal{M}$, atunci $B_1 \cap B_2$ este o intersecţie de cel mult k+1 mulţimi din $\mathcal{M}$, adică $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$.

Dacă $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$ este topologia generată de $\mathcal{B}$, atunci o mulţime din $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$, este o uniune arbitrară de intersecţii finite de mulţimi din $\mathcal{M}$. Cu notaţia din 2.32, să arătăm că $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\mathcal{B}}$. Deoarece $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}$ şi $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}_{\mathcal{B}}$ [v.2.35,1)] rezultă $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{U}_{\mathcal{B}}$, ceea ce implică $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}_{\mathcal{B}}$. Pe de altă parte, deoarece $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ conţine intersecţii finite de mulţimi din $\mathcal{M}$, aşa încît în baza condiţiei (3) din definiţia topologiei, $\mathcal{U}$ va conţine şi uniuni arbitrare de intersecţii finite de mulţimi din $\mathcal{M}$, adică $\mathcal{U}_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{U}$.

Q. E. D.

Observaţii 1) Topologia $\mathcal{U}$ din enunţul propoziţiei 2.32 poate fi concepută în două moduri diferite, anume fie ca inter-

secţia tuturor topologiilor pe X ce conţin pe $\mathcal{M}$, fie ca topologia generată de baza obţinută din $\mathcal{M}$. Această situaţie este similară cu cea întîlnită în algebra liniară, unde dată o submulţime M a spaţiului vectorial V, cel mai mic subspaţiu vectorial al lui V ce conţine pe M poate fi privit fie ca intersecţia tuturor subspaţiilor vectoriale ce conţin pe M, fie ca subspaţiul vectorial generat de M.

2) Fie $(X, \mathcal{T})$ un spaţiu topologic, $\mathcal{M} \subseteq 2^X$ şi $\mathcal{B}$ baza pentru o topologie pe X din enunţul propoziţiei 2.38 definită cu ajutorul lui $\mathcal{M}$. Dacă topologia generată de $\mathcal{B}$ coincide cu $\mathcal{T}$, atunci se zice că $\mathcal{M}$ este un <u>sistem de generatori</u> sau o <u>subbază</u> pentru $\mathcal{T}$.

2.39 <u>Definiţie</u>. Fie X o mulţime, $\mathcal{B}_1$ şi $\mathcal{B}_2$ două baze pentru topologii pe X. Vom spune că $\mathcal{B}_1$ şi $\mathcal{B}_2$ sînt <u>echivalente</u> şi vom scrie $\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_2$, dacă ele generează aceeaşi topologie, adică dacă $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_1} = \mathcal{T}_{\mathcal{B}_2}$.

<u>Observaţie</u>. " $\sim$ " este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea bazelor pentru topologii pe X.

2.40 <u>Propoziţie</u>. Fie X o mulţime, $\mathcal{B}_1$ şi $\mathcal{B}_2$ baze pentru topologii pe X. Atunci $\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_2$ dacă şi numai dacă următoarele două condiţii sînt satisfăcute :

(1) Pentru fiecare $x \in X$ şi fiecare $B_1 \in \mathcal{B}_1$ cu proprietatea $x \in B_1$, există $B_2 \in \mathcal{B}_2$ astfel încît $x \in B_2 \subseteq B_1$;

(2) Pentru fiecare $x \in X$ şi fiecare $B_2 \in \mathcal{B}_2$ cu proprietatea $x \in B_2$, există $B_1 \in \mathcal{B}_1$ astfel încît $x \in B_1 \subseteq B_2$.

<u>Demonstraţie</u>. Presupunem că $\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_2$ şi fie $x \in B_1 \in \mathcal{B}_1$ Deoarece $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}_1}$ şi $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_1} = \mathcal{T}_{\mathcal{B}_2}$ rezultă că

$B_1 \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}_2}$, adică există $\tilde{\mathcal{B}}_2 \subseteq \mathcal{B}_2$ astfel încît $B_1 = \bigcup_{B_2 \in \tilde{\mathcal{B}}_2} B_2$.

Deci există o mulțime $B_2 \in \mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{B}_2$ astfel încît $x \in B_2 \subseteq B_1$, adică afirmația (1) este dovedită. Afirmația (2) se dovedește în mod similar.

Reciproc, să presupunem că (1) și (2) sînt satisfăcute. Să arătăm întîi că $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_1} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{B}_2}$. Fie $B \in \mathcal{B}_1$. In baza lui (1), pentru fiecare $x \in B$, există $B_x \in \mathcal{B}_2$ astfel încît $x \in B_x \subseteq B$. Dar atunci $B \subseteq \bigcup_{x \in B} B_x \subseteq B$, adică $B = \bigcup_{x \in B} B_x \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}_2}$. Prin urmare, $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}_2}$. Dar o mulțime arbitrară din $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_1}$ este o uniune de mulțimi din $\mathcal{B}_1$ și cum o uniune de elemente din $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_2}$ aparține tot lui $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_2}$, rezultă $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_1} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{B}_2}$. Similar, utilizînd (2), obținem incluziunea $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_2} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{B}_1}$, deci $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_1} = \mathcal{T}_{\mathcal{B}_2}$.

Q. E. D.

2.41 Corolar. Dacă $M = \mathbb{R}^2$ este planul real obișnuit, ρ_1, ρ_2, ρ_3 sînt cele trei metrici definite în exemplul ce **precede** 2.3 și

$$\mathcal{B}_i = \left\{ B_{\rho_i}(m,a) \mid m \in M \text{ și } a \in \mathbb{R}_{>0} \right\}, \quad i=1,2,3,$$

atunci $\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_2 \sim \mathcal{B}_3$, adică cele trei metrici determină aceeași topologie pe $\mathbb{R}^2$.

In adevăr, condițiile (1) și (2) din 2.40 sînt evident satisfăcute.

2.42 Observație In general nu toate metricile definite pe o mulțime nevidă M determină aceeași topologie pe M. De exemplu fie $M = \mathbb{R}$ și $\rho_1, \rho_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ două metrici pe $\mathbb{R}$ definite prin: $\forall\, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $\rho_1(r_1,r_2) = |r_2 - r_1|$ și

$$\rho_2(r_1,r_2) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } r_1 = r_2, \\ 1 & \text{dacă } r_1 \neq r_2. \end{cases}$$

Mulțimile deschise ale topologiei definite de ρ_1 sînt uniuni de intervale deschise din $\mathbb{R}$, în timp de topologia definită de

$\mathcal{S}_2$ este topologia discretă pe $\mathbb{R}$. In adevăr, $\mathcal{B}_{\mathcal{S}_2}(r,1/2)=\{r\}$ pentru orice $r\in\mathbb{R}$, aşa încît orice mulţime formată dintr-un singur număr real este o mulţime deschisă. Deoarece orice submulţime $S\subseteq\mathbb{R}$ se poate scrie sub forma $S=\bigcup_{s\in S}\{s\}$, unde fiecare submulţime de forma $\{s\}$ este deschisă în $\mathbb{R}$, rezultă că fiecare submulţime a lui $\mathbb{R}$ este deschisă. Deci topologia determinată de $\mathcal{S}_2$ pe $\mathbb{R}$ este $2^{\mathbb{R}}$.

2.43 Observaţie. Dacă $\mathcal{B}$ este o bază pentru o topologie pe X şi $S\in 2^X$, atunci $\mathcal{B}_S=\{S\cap B \mid B\in\mathcal{B}\}$ este o bază pentru o topologie pe S. Mai mult, $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_S}=(\mathcal{T}_{\mathcal{B}})_S$, adică topologia generată de $\mathcal{B}_S$ pe S coincide cu topologia indusă de $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ pe S. De fapt este adevărată o proprietate ceva mai generală, anume cea dată de propoziţia următoare :

2.44 Propoziţie. Fie W şi X mulţimi, $g:W\longrightarrow X$ o aplicaţie şi $\mathcal{B}$ o bază pentru o topologie pe X. Atunci familia

$$\mathcal{B}_1=\{g^{-1}(B) \mid B\in\mathcal{B}\}\subseteq 2^W$$

este o bază pentru o topologie pe W. Mai mult, topologia generată de $\mathcal{B}_1$ pe W coincide cu topologia indusă pe W de topologia $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ prin intermediul aplicaţiei g (v. şi 2.8)

Demonstraţia acestei afirmaţii este imediată şi o lăsăm în seama cititorului.

2.45 Propoziţie. Dacă $(X,\mathcal{T})$ este un spaţiu topologic şi $\mathcal{B}$ o bază finită sau numărabilă pentru topologia $\mathcal{T}$, adică $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}=\mathcal{T}$, atunci $(X,\mathcal{T})$ este separabil.

Demonstraţie. Fie $\mathcal{B}=\{B_0,B_1,\ldots,B_n,\ldots\}$ baza finită sau numărabilă a spaţiului topologic $(X,\mathcal{T})$, unde $B_0=\emptyset$. Pentru fiecare $n\geq 1$, să alegem $x_n\in B_n$ şi să notăm $A=\{x_1,\ldots,x_n,\ldots\}$. Să demonstrăm că $\bar{A}=X$. Procedăm prin reducere la absurd. Dacă $\bar{A}\subset X$, mulţimea $D=X\setminus\bar{A}\in\mathcal{T}$, $D\neq\emptyset$ şi $D\cap A=\emptyset$.

Deoarece $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \mathcal{T}$, rezultă $D = \bigcup_K B_{n_k}$, aşa încît $B_{n_k} \cap A = \emptyset$, oricare ar fi $k=1,2,\ldots$, ceea ce este absurd, căci $B_{n_k} \cap A \supseteq \{x_{n_k}\}$, oricare ar fi $k=1,2,\ldots$ Deci $\bar{A}=X$.

Q. E. D.

2.46. Observaţii. 1) Dacă un spaţiu topologic $(X, \mathcal{T})$ posedă o bază finită sau numărabilă pentru topologia $\mathcal{T}$, atunci se zice că $(X, \mathcal{T})$ satisface a doua axiomă de numărabilitate. Prin urmare, un spaţiu topologic ce satisface a doua axiomă de numărabilitate este separabil.

2) Reciproca propoziţiei de mai sus nu este în general adevărată.

In adevăr, fie X o mulţime infinită nenumărabilă dotată cu topologia cofinită. Orice parte infinită a lui X este densă în X deoarece intersectează orice mulţime deschisă nevidă din X (v.2.21). In particular, o submulţime numărabilă a lui X va fi densă în X, deci X este separabil . Să presupunem acum că există o bază numărabilă $\mathcal{B} = \{ B_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ pentru topologia cofinită a lui X. Fie $x \in X$. Atunci

$$G = \bigcap \{ B_{n_k} \mid B_{n_k} \in \mathcal{B} \text{ şi } x \in B_{n_k} \} = \{ x \},$$

deoarece dacă $x' \in G$ şi $x \neq x'$, mulţimea $X \setminus \{ x' \}$ este deschisă şi conţine pe x, deci există numărul natural k astfel încît $B_{n_k} \in \mathcal{B}$ şi $x \in B_{n_k} \subseteq X \setminus \{ x' \}$. Deci $x' \notin B_{n_k}$, ceea ce implică $x' \in G$. Dar atunci.

$$X \setminus \{ x \} = (\bigcap B_{n_k})' = \bigcup B'_{n_k} ,$$

cu B'_{n_k} mulţimi finite, de unde ar rezulta că X este o mulţime finită sau numărabilă, ceea ce este absurd.

2.47 Propoziţie. Dacă un spaţiu topologic $(X, \mathcal{T})$ posedă o bază finită sau numărabilă pentru topologia $\mathcal{T}$, atunci orice

bază pentru topologia $\mathcal{T}$ conține o bază finită sau numărabilă pentru $\mathcal{T}$.

Demonstrație. Fie $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_n, \ldots\}$ o bază finită sau numărabilă pentru $\mathcal{T}$ și $\mathcal{B}' = \{B'_\alpha\}_{\alpha \in A}$ o bază arbitrară pentru topologia $\mathcal{T}$. Dacă $B_m \in \mathcal{B}$, $B_m \neq \emptyset$, atunci B_m este uniunea mulțimilor din $\mathcal{B}'$ conținute în B_m, căci $\mathcal{B}'$ este o bază pentru $\mathcal{T}$. In particular, dacă $x \in B_m$, atunci există $B'_\alpha \in \mathcal{B}'$ astfel încît $x \in B'_\alpha \subset B_m$. Deoarece $\mathcal{B}$ este o bază pentru topologia $\mathcal{T}$, B'_α este o uniune de mulțimi din $\mathcal{B}$, așa încît există o mulțime nevidă $B_n \subset B'_\alpha$ astfel încît :

$$(***) \quad x \in B_n \subset B'_\alpha \subset B_m .$$

Să considerăm mulțimea tuturor perechilor (B_n, B_m) din $\mathcal{B}$ pentru care există cel puțin o mulțime $B'_\alpha \in \mathcal{B}'$ astfel încît $B_n \subset B'_\alpha \subset B_m$. Pentru fiecare asemenea pereche (B_n, B_m) să alegem o asemenea mulțime B'_α pe care o vom nota cu $B'_{n,m}$. $\{B'_{n,m}\}$ este atunci o familie finită sau numărabilă de multimi deschise conținută în $\mathcal{B}'$. Dacă B_m este o mulțime arbitrară din $\mathcal{B}$ și $x \in B_m$, atunci în baza lui (* * *) există o mulțime $B'_{n,m}$ astfel încît $x \in B'_{n,m} \subset B_m$. Prin urmare B_m este uniunea tuturor mulțimilor $B'_{n,m}$ conținute în B_m. O mulțime deschisă nevidă arbitrară D din X este uniunea mulțimilor B_m conținute în D și deci și uniunea mulțimilor $B'_{n,m}$ conținute în D. Deci $\{B'_{n,m}\} \cup \cup \{\emptyset\}$ este o bază pentru topologia $\mathcal{T}$ [v.2.35,4)] , ce este finită sau numărabilă și conținută în $\mathcal{B}'$.

Q. E. D.

Aplicații continue. Aplicații deschise și închise

Să precizăm întîi unele notații pe care le vom utiliza consecvent în toate cele ce urmează: $\mathbb{R}$ va nota dreapta numerică reală cu topologia precizată mai jos; I intervalul închis $[0,1] \subset \mathbb{R}$

cu topologia indusă de $\mathbb{R}$; $\mathbb{C}$ planul complex; $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ mulţimea numerelor reale nenegative cu topologia indusă de $\mathbb{R}$; $\mathbb{R}^n$ spaţiul real aritmetic n-dimensional $(n \geqslant 1)$ dotat cu topologia canonică determinată de metrica euclidiană canonică ϱ_1:

$$\varrho_1((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = \Big[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\Big]^{1/2} \quad (*.2.37);$$

$\|x\| = (x_1^2+\dots+x_n^2)^{1/2}$ norma euclidiană a vectorului $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$; $S^{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ sfera unitate din $\mathbb{R}^n (n \geqslant 1)$ cu topologia indusă de topologia obişnuită (canonică) a lui $\mathbb{R}^n$; $D^n = \{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant 1\}$ discul (celula) unitate închis din $\mathbb{R}^n$ a cărui frontieră este S^{n-1} cu topologia indusă de topologia obişnuită a lui $\mathbb{R}^n$.

2.48 Definiţie. Fie $(X,\mathcal{T})$ şi $(Y,\mathcal{U})$ spaţii topologice. Printr-o aplicaţie continuă f de la spaţiul topologic $(X,\mathcal{T})$ în spaţiul topologic $(Y,\mathcal{U})$ vom înţelege o aplicaţie $f:X\longrightarrow Y$ astfel încît pentru fiecare $U\in\mathcal{U}$, $f^{-1}(U)\in\mathcal{T}$.

Pentru simplitate, dacă nu există pericol de confuzie, atunci cînd vom considera o aplicaţie continuă f între spaţiile topologice $(X,\mathcal{T})$ şi $(Y,\mathcal{U})$ nu vom mai specifica topologiile $\mathcal{T}$ şi $\mathcal{U}$; în acest caz vom spune pur şi simplu că f este o aplicaţie continuă de la X în Y.

2.49 Exemple. 1) Dacă $(X,\mathcal{T})$ şi $(Y,\mathcal{U})$ sînt spaţii topologice şi $f:X\longrightarrow Y$ este o aplicaţie constantă [v.1.16,2], atunci f este o aplicaţie continuă de la $(X,\mathcal{T})$ în $(Y,\mathcal{U})$. In particular, acest rezultat este valabil chiar dacă $\mathcal{T}$ coincide cu topologia trivială pe X.

In adevăr, să presupunem că $f(x)=y_0$, $\forall\, x\in X$, şi fie $U\in\mathcal{U}$. Dacă $y_0\notin U$, atunci $f^{-1}(U)=\emptyset\in\mathcal{T}$. Dacă $y_0\in U$, atunci $f^{-1}(U)=X\in\mathcal{T}$.

2) Dacă $(X,\mathcal{T})$ este un spaţiu topologic, atunci $1_X:X\longrightarrow X$ este o aplicaţie continuă de la $(X,\mathcal{T})$ în $(X,\mathcal{T})$.

In adevăr, pentru orice $D \in \mathcal{T}$, $(1_X)^{-1}(D)=D \in \mathcal{T}$.

3) Mai general, dacă $(X, \mathcal{T})$ este un spaţiu topologic şi $S \subseteq X$, atunci incluziunea $i:S \subseteq X$ este o aplicaţie continuă de la $(S, \mathcal{T}_S)$ în $(X, \mathcal{T})$.

In adevăr, pentru orice $D \in \mathcal{T}$, $i^{-1}(D) = S \cap D \in \mathcal{T}_S$ (v.2.10).

4) Mai general, fie $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{U})$ spaţii topologice, $X_1 \subseteq X$, $Y_1 \subseteq Y$ şi $f:X \longrightarrow Y$ o aplicaţie continuă de la $(X,\mathcal{T})$ în $(Y, \mathcal{U})$ astfel încît $f(X_1) \subseteq Y_1$. Dacă $f_1:X_1 \longrightarrow Y_1$ notează restricţia lui f, atunci f_1 este o aplicaţie continuă de la $(X_1, \mathcal{T}_{X_1})$ în $(Y_1, \mathcal{U}_{Y_1})$. In particular, dacă $S \subseteq X$, atunci restricţia $f_S:S \longrightarrow Y$ este continuă. In adevăr, dacă $U_1 \in \mathcal{U}_{Y_1}$, atunci $U_1=Y_1 \cap U$, unde $U \in \mathcal{U}$. Prin urmare,

$$(f_1)^{-1}(U_1)=(f_1)^{-1}(Y_1 \cap U)=\left[f^{-1}(Y_1 \cap U)\right] \cap X_1 =$$

$$= f^{-1}(U) \cap \left[f^{-1}(Y_1) \cap X_1\right] = f^{-1}(U) \cap X_1 \in \mathcal{T}_{X_1},$$

căci $f^{-1}(Y_1) \supseteq X_1$ şi $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$.

5) Fie $(X,\mathcal{T})$, $(Y,\mathcal{U})$ spaţii topologice, $\mathcal{T}_1$ o topologie mai fină decît $\mathcal{T}$ pe X şi $\mathcal{U}_1$ o topologie mai puţin fină decît $\mathcal{U}$ pe Y (v.2.30). Dacă $f:X \longrightarrow Y$ este o aplicaţie continuă de la $(X,\mathcal{T})$ în $(Y,\mathcal{U})$, atunci f este o aplicaţie continuă şi de la $(X,\mathcal{T}_1)$ în $(Y,\mathcal{U}_1)$.

In adevăr, $\forall U_1 \in \mathcal{U}_1$, $U_1 \in \mathcal{U}$ aşa încît $f^{-1}(U_1) \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_1$.

6) Din cursul de analiză clasică se ştie că următoarele aplicaţii sînt continue (v. şi 3.32).

(a) Aplicaţiile liniare de la $\mathbb{R}^n$ în $\mathbb{R}$; în particular, proiecţiile canonice $p_i: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, pe coordonata de indice i, anume $p_i(x_1,\ldots,x_n)=x_i$, $i=1,\ldots,n$.

(b) Aplicaţia (de înmulţire a numerelor reale) de la $\mathbb{R}^2$ în $\mathbb{R}$ definită prin $(x,y) \longrightarrow x.y$.

Mai general, orice aplicaţie n-liniară de la $\mathbb{R}^{np} = \mathbb{R}^p x \ldots x \mathbb{R}^p$ (n-ori) în $\mathbb{R}$.

(c) Pentru orice $\alpha > 0 (\alpha \in \mathbb{R})$, aplicaţia de la $\mathbb{R}_{\geq 0}$ în $\mathbb{R}$ definită prin $x \longmapsto x^\alpha$.

(d) Aplicaţia de la $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ în $\mathbb{R}$ definită prin $x \mapsto \frac{1}{x}$.

(e) Aplicaţia modul de la $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}_{\geq 0}$

(f) Aplicaţiile exp, sin, cos de la $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}$.

(g) Aplicaţia ln de la $\mathbb{R}_{>0}$ în $\mathbb{R}$.

Observaţie. Fie X o mulţime şi $\mathcal{T}$, $\mathcal{U}$ două topologii pe X. Atunci 1_X este o aplicaţie continuă de la $(X, \mathcal{U})$ în $(X, \mathcal{T})$ dacă şi numai dacă topologia $\mathcal{U}$ este mai fină decît topologia $\mathcal{T}$ (v.2.30).

Vom dovedi în continuare condiţii suficiente (eventual şi necesare) pentru continuitatea unei aplicaţii.

2.50. Propoziţie. Fie $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{U})$ spaţii topologice şi $f: X \longrightarrow Y$ o aplicaţie. Atunci următoarele condiţii sînt echivalente:

(a) f este o aplicaţie continuă de la $(X, \mathcal{T})$ în $(Y, \mathcal{U})$

(b) Pentru orice $A \subseteq X$, $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

(c) Pentru orice submulţime închisă F din Y, $f^{-1}(F)$ este o submulţime închisă din X.

Demonstraţie. Să dovedim că (a) $\Longrightarrow$ (b). Fie $A \subseteq X$ şi $x \in \bar{A} = A \cup B$, unde B este mulţimea acelor puncte din X ce sînt puncte de acumulare pentru A [v.2.18]. Dacă $x \in A$, atunci $f(x) \in f(A) \subseteq \overline{f(A)}$ [v.2.19,5) (b')]. Dacă $x \in B$, fie $U \in \mathcal{U}$ astfel încît $f(x) \in U$. Atunci $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$, $x \in f^{-1}(U)$ şi $(f^{-1}(U) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Dacă $a \in (f^{-1}(U) \setminus \{x\}) \cap A$, atunci $f(a) \in (U \setminus \{f(x)\}) \cap f(A)$, adică $(U \setminus \{f(x)\}) \cap f(A) \neq \emptyset$, ceea ce arată că $f(x) \in \overline{f(A)}$. Deci $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Să arătăm acum că (b) $\Longrightarrow$ (c). Fie $A=f^{-1}(F)$, unde F este o mulțime închisă arbitrară din Y. Atunci $f(A) \subseteq F$ [v.1.29, (4)], de unde rezultă $\overline{f(A)} \subseteq \overline{F} = F$ [v.2.19,5), (b') și 2.19,6)]. Tinînd seama de ipoteză obținem $f(\bar{A}) \subseteq F$, deci $\bar{A} \subseteq f^{-1}(F)=A$ [v.1.29,(4)] și cum $A \subseteq \bar{A}$ [v.2.19,5), (b')], rezultă $A=\bar{A}$. Deci $A=f^{-1}(F)$ este închisă în X [v.2.19,6)] și condiția (c) este verificată.

In sfîrșit, să dovedim implicația (c) $\Longrightarrow$ (a). Fie deci $U \in \mathcal{U}$. Atunci $C_Y(U)$ este închisă în Y și deci $f^{-1}(C_Y(U))= C_X(f^{-1}(U))$ [v.1.29,(3)] este închisă în X, adică $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$.

Q. E. D.

Utilizînd 2.50, să arătăm de exemplu că orice p-plan din $\mathbb{R}^n (o < p < n)$ este o submulțime închisă a lui $\mathbb{R}^n$. In acest scop este suficient să arătăm că orice hiperplan din $\mathbb{R}^n$ este o submulțime închisă a lui $\mathbb{R}^n$, căci orice p-plan poate fi conceput ca intersecția a n-p hiperplane. Dacă $a_1x_1+\ldots+a_nx_n+b=o$ este ecuația hiperplanului $H \subset \mathbb{R}^n$ și $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ este aplicația continuă definită prin $f(x_1,\ldots,x_n)=a_1x_1+\ldots+a_nx_n+b$, atunci $H=f^{-1}(\{o\})$, ceea ce arată că H este o submulțime închisă a lui $\mathbb{R}^n$, deoarece $\{o\}$ este o submulțime închisă a lui $\mathbb{R}$.

2.51. <u>Propoziție</u>. Fie X_1, X_2 mulțimi și $\mathcal{B}_1$ (respectiv $\mathcal{B}_2$) o bază pentru o topologie pe X_1 (respectiv X_2). Atunci $f: X_1 \longrightarrow X_2$ este o aplicație continuă de la $(X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{B}_1})$ în $(X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{B}_2})$ dacă și numai dacă pentru fiecare $x_1 \in X_1$ și fiecare $B_2 \in \mathcal{B}_2$ cu $f(x_1) \in B_2$, există $B_1 \in \mathcal{B}_1$ astfel încît $x_1 \in B_1$ și $f(B_1) \subseteq B_2$.

<u>Demonstrație</u>. Să presupunem că $f: X_1 \longrightarrow X_2$ este o aplicație continuă de la $(X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{B}_1})$ în $(X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{B}_2})$. Dacă $x_1 \in X_1$

și $f(x_1) \in B_2 \in \mathcal{B}_2$, atunci $f^{-1}(B_2) \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}_1}$, deci $f^{-1}(B_2)$ este o uniune de elemente din $\mathcal{B}_1$ (v.2.34). Deoarece $x_1 \in f^{-1}(B_2)$, există un element $B_1 \in \mathcal{B}_1$ din această uniune astfel încît $x_1 \in B_1 \subseteq f^{-1}(B_2)$, ceea ce implică $f(B_1) \subseteq B_2$ [v.1.29, (4)].

Reciproc, să presupunem că pentru fiecare $x_1 \in X_1$ și fiecare $B_2 \in \mathcal{B}_2$ cu $f(x_1) \in B_2$, există $B_1 \in \mathcal{B}_1$ astfel încît $x_1 \in B_1$ și $f(B_1) \subseteq B_2$. Dacă $U \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}_2}$, trebuie să arătăm că $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}_1}$. Fie $x_1 \in f^{-1}(U)$. Atunci $f(x_1) \in U$, deci există $B_{2,x_1} \in \mathcal{B}_2$ astfel încît $f(x_1) \in B_{2,x_1} \subseteq U$. Prin urmare, în baza ipotezei, există $B_{1,x_1} \in \mathcal{B}_1$ astfel încît $x_1 \in B_{1,x_1}$ și $f(B_{1,x_1}) \subseteq B_{2,x_1} \subseteq U$, de unde rezultă că $x_1 \in B_{1,x_1} \subseteq f^{-1}(U)$ [v.din nou 1.29,(4)]. Deci $f^{-1}(U) = \bigcup_{x_1 \in f^{-1}(U)} B_{1,x_1}$ [v.raționamentul de la 2.5,7)], adică $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}_1}$

2.52 <u>Propoziție</u>. Fie $(X,\mathcal{T})$, $(Y,\mathcal{U})$ spații topologice, $f:X \to Y$ o aplicație și $\mathcal{M}$ o subbază pentru topologia $\mathcal{U}$ [v.observația 2) ce succede lui 2.38]. Atunci f este continuă dacă și numai dacă pentru orice $M \in \mathcal{M}$, $f^{-1}(M) \in \mathcal{T}$.

<u>Demonstrație</u>. Deoarece $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{U}$, rezultă că pentru orice $M \in \mathcal{M}$, $M \in \mathcal{U}$. Prin urmare, dacă f este continuă, $f^{-1}(M) \in \mathcal{T}$ (v.2.48). Reciproc, să considerăm baza $\mathcal{B}$ corespunzătoare lui $\mathcal{M}$ (v.2.38). Dacă $U \in \mathcal{U}$, atunci există $\tilde{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{B}$ astfel încît $U = \bigcup_{B \in \tilde{\mathcal{B}}} B$, de unde rezultă $f^{-1}(U) = \bigcup_{B \in \tilde{\mathcal{B}}} f^{-1}(B)$ [v.129,(2)]. Pentru a dovedi că $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$ va fi deci suficient să arătăm că pentru orice $B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$. Dacă $B = \emptyset$ acest lucru este evident [v.1.29,(2))]. Dacă $B = M_1 \cap \ldots \cap M_k$, unde $M_i \in \mathcal{M}$, $\forall i=1,\ldots,k$, atunci în baza aceleași propoziții 1.29,(2), $f^{-1}(B) = f^{-1}(M_1) \cap \ldots \cap f^{-1}(M_k)$, ceea ce implică $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$, căci orice intersecție finită

de elemente din $\mathcal{T}$ aparţine lui $\mathcal{T}$.

Q. E. D.

2.53 Observaţie. Procedînd complet similar ca în demonstraţia propoziţiei de mai sus se poate obţine imediat şi următorul rezultat: Dacă $(X,\mathcal{T})$, $(Y,\mathcal{U})$ sînt spaţii topologice , $f:X\longrightarrow Y$ o aplicaţie şi $\mathcal{B}$ o bază pentru topologia $\mathcal{U}$, atunci f este continuă dacă şi numai dacă pentru orice $B\in\mathcal{B}$, $f^{-1}(B)\in\mathcal{T}$.

2.54 Definiţie. Fie $(X,\mathcal{T})$ şi $(Y,\mathcal{U})$ spaţii topologice. Dacă $f:X\longrightarrow Y$ este o aplicaţie cu proprietatea că pentru orice $D\in\mathcal{T}$, $f(D)\in\mathcal{U}$, atunci f se numeşte aplicaţie deschisă de la spaţiul topologic $(X,\mathcal{T})$ în spaţiul topologic $(Y,\mathcal{U})$. O aplicaţie $f:X\longrightarrow Y$ cu proprietatea că imaginea oricărei mulţimi închise din X este o mulţime închisă din Y, se numeşte aplicaţie închisă de la spaţiul topologic $(X,\mathcal{T})$ în spaţiul topologic $(Y,\mathcal{U})$

Exemplu. Dacă $(X,\mathcal{T})$ este un spaţiu topologic şi $S\subseteq X$ este deschisă (resp.închisă) în X, atunci incluziunea $i:S\subset X$ este o aplicaţie deschisă (resp.închisă) de la spaţiul topologic $(S,\mathcal{T}_S)$ în spaţiul topologic $(X,\mathcal{T})$ (v.2.11).

Vom stabili acum o condiţie suficientă pentru ca o aplicaţie să fie deschisă.

2.55 Propoziţie. Fie $(X,\mathcal{T})$, $(Y,\mathcal{U})$ spaţii topologice, $f:X\longrightarrow Y$ o aplicaţie şi $\mathcal{B}$ o bază pentru topologia $\mathcal{T}$. Aplicaţia f este deschisă dacă şi numai dacă pentru orice $B\in\mathcal{B}$, $f(B)\in\mathcal{U}$.

Demonstraţie . In adevăr, pentru orice $D\in\mathcal{T}$, există $\tilde{\mathcal{B}}\subseteq\mathcal{B}$ astfel încît $D=\bigcup_{B\in\tilde{\mathcal{B}}}B$. Prin urmare, $f(D)=\bigcup_{B\in\tilde{\mathcal{B}}}f(B)\in\mathcal{U}$ [v.129,(1)] .

2.56 Propoziţie. Fie $(X,\mathcal{S})$, $(Y,\mathcal{T})$, $(Z,\mathcal{U})$ spaţii topologice şi $f:X\longrightarrow Z$ o aplicaţie continuă de la $(X,\mathcal{S})$ în $(Z,\mathcal{U})$

(a) Dacă $h:Y\longrightarrow Z$ este o aplicaţue deschisă injectivă

şi $g:X \longrightarrow Y$ este o aplicaţie astfel încît $h \circ g = f$, atunci g este o aplicaţie continuă.

(b) Dacă $h:X \longrightarrow Y$ este o aplicaţie deschisă surjectivă şi $g:Y \longrightarrow Z$ este o aplicaţie astfel încît $g \circ h = f$, atunci g este o aplicaţie continuă.

Demonstraţie.

(a) Fie $D \in \mathcal{T}$. Deoarece $h^{-1}(h(D)) = D$ [v.1.29,(6))] , $f^{-1} = g^{-1} \circ h^{-1}$ şi f este continuă, rezultă că $g^{-1}(D) = f^{-1}(h(D)) \in \mathcal{S}$, adică g este continuă (v.2.48).

(b) Fie $U \in \mathcal{U}$. Deoarece $h(h^{-1}(U)) = U$ [v.1.29,(7)] , $f^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1}$ şi f este continuă, rezultă că $g^{-1}(U) = h(f^{-1}(U)) \in \mathcal{T}$ adică g este continuă (v.2.48).

Q. E. D.

2.57 Propoziţie. Fie $(X,\mathcal{S}),(Y,\mathcal{T}),(Z,\mathcal{U})$ spaţii topologice. Dacă $f:X \longrightarrow Y$ este o aplicaţie continuă de la $(X,\mathcal{S})$ în $(Y,\mathcal{T})$ şi $g:Y \longrightarrow Z$ este o aplicaţie continuă de la $(Y,\mathcal{T})$ în $(Z,\mathcal{U})$, atunci $g \circ f:X \longrightarrow Z$ este o aplicaţie continuă de la $(X,\mathcal{S})$ în $(Z,\mathcal{U})$.

Demonstraţie. Fie $U \in \mathcal{U}$. Deoarece g este continuă, $g^{-1}(U) \in \mathcal{T}$. Deoarece f este continuă, $f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \mathcal{S}$. Dar $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (f^{-1} \circ g^{-1})(U) = (g \circ f)^{-1}(U)$ [v.1.29,(5)] , aşa încît $(g \circ f)^{-1}(U) \in \mathcal{S}$, adică $g \circ f$ este continuă.

Q. E. D.

2.58 Observaţie. Codomeniul unei aplicaţii nu este relevant-modulo incluziune-pentru continuitatea unei aplicaţii. In adevăr, dacă $(X,\mathcal{T})$, $(Y,\mathcal{U})$ sînt spaţii topologice, $i:Y_1 \subset Y$ este incluziunea şi $f:X \longrightarrow Y_1$ este o aplicaţie, atunci continuitatea lui $i \circ f$ implică continuitatea lui f [v.2.49,4)] . Reciproc, continuitatea lui f implică continuitatea lui $i \circ f$ [v.2.49,3) şi 2.57].

Fie X o mulțime nevidă și $f:X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ o aplicație. Atunci f definește aplicațiile componente $f_i:X \longrightarrow \mathbb{R}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ prin

$$f(x)=(f_1(x),\ldots,f_n(x)),\ x \in X, \text{ adică } f_i=p_i \circ f,\ i=1,\ldots,n.$$

2.59 Propoziție. Fie $(X,\mathcal{T})$ un spațiu topologic și $f:X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ o aplicație. Aplicația f este continuă dacă și numai dacă $f_i:\ X \longrightarrow \mathbb{R}$ este continuă pentru orice $i=1,\ldots,n$.

Demonstrație. Dacă f este continuă, atunci $f_i=p_i \circ f$ este continuă [v.2.49,6), (a) și 2.57]. Reciproc, să presupunem că f_i este continuă pentru orice $i=1,\ldots,n$. O mulțime din baza pentru topologia canonică pe $\mathbb{R}^n$ este de forma:

$$U_1 \times \ldots \times U_n = (U_1 \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}) \cap (\mathbb{R} \times U_2 \times \ldots \times \mathbb{R}) \cap \ldots$$

$$\ldots \cap (\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} \times U_n) = p_1^{-1}(U_1) \cap p_2^{-1}(U_2) \cap \ldots \cap p_n^{-1}(U_n)$$

unde U_i este deschisă în $\mathbb{R}$ pentru orice $i=1,\ldots,n$. Atunci

$$f^{-1}(U_1 \times \ldots \times U_n)=f^{-1}(p_1^{-1}(U_1)) \cap f^{-1}(p_2^{-1}(U_2)) \cap \ldots$$

$$\cap f^{-1}(p_n^{-1}(U_n))=(p_1 f)^{-1}(U_1) \cap \ldots \cap (p_n \circ f)^{-1}(U_n) =$$

$$=f_1^{-1}(U_1) \cap \ldots \cap f_n^{-1}(U_n) \in \mathcal{T},$$

adică f este cohtinuă (v.2.53).

Q. E. D.

2.60 Exemple. Fie $(X,\mathcal{T})$ un spațiu topologic.

1) Dacă $f_1,f_2:X \longrightarrow \mathbb{R}$ sînt aplicații continue, atunci f_1+f_2, f_1-f_2, $f_1.f_2:X \longrightarrow \mathbb{R}$ sînt aplicații continue. In particular dacă $\alpha \in \mathbb{R}$ și $f:X \longrightarrow \mathbb{R}$ este continuă, atunci $\alpha f:X \longrightarrow \mathbb{R}$ este continuă.

Să justificăm de exemplu continuitatea aplicației f_1+f_2.

In acest scop n-avem decît să observăm că $f_1+f_2=\sigma\circ f$, unde $f:X\longrightarrow\mathbb{R}^2$, $f(x)=(f_1(x),\ f_2(x))$, $x\in X$, iar $\sigma:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, $\sigma(x_1,x_2)=x_1+x_2$, $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$. Dar f şi σ sînt continue [v.2.59 şi 2.49,6),(a)], aşa încît şi $\sigma\circ f$ va fi continuă (v.2.57).

2) Dacă aplicaţia continuă $f:X\longrightarrow\mathbb{R}$ nu se anulează pe X, atunci $f^{-1}:X\longrightarrow\mathbb{R}$, $f^{-1}(x)=\frac{1}{f(x)}$, $x\in X$, este continuă.

In adevăr, n-avem decît să observăm că $f^{-1}=\varphi\circ f_1$, unde $f_1:X\longrightarrow\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ este aplicaţia continuă indusă de f [v.2.49,4)], iar $\varphi:\mathbb{R}^*\longrightarrow\mathbb{R}$ este aplicaţia continuă definită prin $\varphi(x)=\frac{1}{x}$; $x\in\mathbb{R}^*$ [v.2.49,6),(d)].

3) Dacă $f:X\longrightarrow\mathbb{R}$ este continuă, atunci $|f|:X\longrightarrow\mathbb{R}$, $|f|(x)=|f(x)|$, $x\in X$, este de asemenea continuă.

4) Dacă $f_1,\ f_2:X\longrightarrow\mathbb{R}$ sînt continue, atunci $\max(f_1,f_2)$ [resp. $\min(f_1,f_2)$] $:X\longrightarrow\mathbb{R}$, $[\max(f_1,f_2)](x)=$

$=\max\{f_1(x),\ f_2(x)\}$ {resp. $[\min(f_1,f_2)](x)=\min\{f_1(x),f_2(x)\}$},

$x\in X$, este continuă.

In adevăr, n-avem decît să ţinem seama că:

$$\max(f_1,f_2)=\frac{1}{2}\left[f_1+f_2+|f_1-f_2|\right],$$

$$\min(f_1,f_2)=\frac{1}{2}\left[f_1+f_2-|f_1-f_2|\right]$$

şi de proprietăţile 1) şi 3) stabilite mai sus.

5) Dacă $f_1,\ldots,f_m:X\longrightarrow\mathbb{R}$ sînt aplicaţii continue, atunci orice polinom în $f_1,\ldots,f_m$ cu coeficienţi reali este o aplicaţie continuă de la X în $\mathbb{R}$. In particular, dacă $X\subseteq\mathbb{R}^n$ şi $p_1,\ldots,p_n:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ sînt proiecţiile canonice identificate respectiv cu $x_1,\ldots,x_n$, atunci orice polinom în $x_1|_X,\ldots,x_n|_X$ cu coeficienţi reali defineşte o aplicaţie continuă de la X în

în $\mathbb{R}$. m asemenea polinoame vor defini atunci o aplicaţie continuă de la X în $\mathbb{R}^m$.

Această afirmaţie se dovedeşte prin inducţie şi este o consecinţă imediată a proprietăţii 1) de mai sus.

2.61 Propoziţie ("Lipirea" aplicaţiilor continue). Fie $(X,\mathcal{T})$, $(Y,\mathcal{U})$ spaţii topologice, F_1 şi F_2 submulţimi închise (sau deschise) din X astfel încît $X = F_1 \cup F_2$, $f_1 : F_1 \longrightarrow Y$ şi $f_2 : F_2 \longrightarrow Y$ aplicaţii continue de la $(F_1, \mathcal{T}_{F_1})$ şi respectiv $(F_2, \mathcal{T}_{F_2})$ în $(Y,\mathcal{U})$ astfel încît $f_1(x)=f_2(x)$ pentru orice $x \in F_1 \cap F_2$. Atunci aplicaţia $g : X \longrightarrow Y$ definită prin

$$g(x) = \begin{cases} f_1(x) & , \ x \in F_1 \\ f_2(x) & , \ x \in F_2 \end{cases}$$

este o aplicaţie continuă de la $(X,\mathcal{T})$ în $(Y,\mathcal{U})$.

Demonstraţie. Să presupunem de exemplu că F_1 şi F_2 sînt submulţimi închise din X. Dacă A este o mulţime închisă din Y, atunci

$$g^{-1}(A)=g^{-1}(A)\cap X = g^{-1}(A)\cap(F_1 \cup F_2) =$$

$$=(g^{-1}(A)\cap F_1)\cup(g^{-1}(A)\cap F_2)=f_1^{-1}(A) \cup f_2^{-1}(A).$$

Dar $f_1^{-1}(A)$ [resp. $f_2^{-1}(A)$] este închisă în F_1 (resp. F_2) (v.2.50) aşa încît $f_1^{-1}(A)$ şi $f_2^{-1}(A)$ sînt submulţimi închise din X (v.2.11), deci $g^{-1}(A)$ este o mulţime închisă din X. Prin urmare, g este continuă (v.2.50).

Q. E. D.

2.62 Observaţie. Proprietatea de "lipire" a aplicaţiilor continue admite următoarea generalizare imediată. Fie $\{F_i\}_{1 \le i \le n}$ o familie finită de mulţimi închise (sau deschise) din spaţiul topologic X astfel încît $X = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ şi să presupunem că pentru

fiecare $i=1,\dots,n$ este definită o aplicaţie continuă $f_i:F_i\longrightarrow Y$, unde Y este alt spaţiu topologic. Dacă pentru orice $i,j\in\{1,\dots,n\}$, $f_i|_{F_i\cap F_j}=f_j|_{F_i\cap F_j}$, atunci există o aplicaţie continuă $g:X\longrightarrow Y$ astfel încît $g|_{F_i}=f_i$, oricare ar fi $i\in\{1,\dots,n\}$.

Să ne reîntoarcem acum la notaţiile din 2.8 şi 2.13 şi să reformulăm rezultatele stabilite acolo în termenii aplicaţiilor continue. Atunci are loc:

2.63 Propoziţie. a) Topologia $\mathcal{S}$ pe W indusă de aplicaţia $g:W\longrightarrow X$, adică contraimaginea topologiei $\mathcal{T}$ prin aplicaţia g definită la 2.8, coincide cu cea mai puţin fină topologie $\mathcal{S}_1$ pe W astfel încît g să fie o aplicaţie continuă de la $(W,\mathcal{S}_1)$ în $(X,\mathcal{T})$.

b) Topologia $\mathcal{U}$ pe Y indusă de aplicaţia $f:X\longrightarrow Y$, adică imaginea topologiei $\mathcal{T}$ prin aplicaţia f definită la 2.8, coincide cu cea mai fină topologie $\mathcal{U}_1$ pe Y astfel încît f să fie o aplicaţie continuă de la $(X,\mathcal{T})$ în $(Y,\mathcal{U}_1)$. Mai general, topologia $\mathcal{U}$ indusă de familia de aplicaţii $\{f_t:X_t\longrightarrow Y\}_{t\in T}$ (v.2.13) coincide cu cea mai fină topologie $\mathcal{U}_1$ pe Y astfel încît f_t să fie o aplicaţie continuă de la $(X_t,\mathcal{T}_t)$ în $(Y,\mathcal{U}_1)$ pentru orice $t\in T$.

Demonstraţie. a) Să observăm întîi că din definiţia topologiei $\mathcal{S}$, g este o aplicaţie continuă de la $(W,\mathcal{S})$ în $(X,\mathcal{T})$, de unde rezultă că $\mathcal{S}_1\subseteq\mathcal{S}$. Reciproc, pentru orice $S\in\mathcal{S}$, există $D\in\mathcal{T}$ astfel încît $S=g^{-1}(D)$. Dar pentru orice $D\in\mathcal{T}, g^{-1}(D)\in\mathcal{S}_1$ aşa încît $S\in\mathcal{S}_1$, adică $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{S}_1$. Deci $\mathcal{S}=\mathcal{S}_1$.

b) Din definiţia topologiei $\mathcal{U}$ rezultă că f_t este o aplicaţie continuă de la $(X_t,\mathcal{T}_t)$ în $(Y,\mathcal{U})$ pentru orice $t\in T$, ceea ce implică $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{U}_1$. Reciproc, pentru orice $U\in\mathcal{U}_1$ şi orice $t\in T$, $f_t^{-1}(U)\in\mathcal{T}_t$, adică $U\in\mathcal{U}$ (v.2.13), deci $\mathcal{U}_1\subseteq\mathcal{U}$.

fiecare $i=1,\dots,n$ este definită o aplicaţie continuă $f_i:F_i \longrightarrow Y$, unde Y este alt spaţiu topologic. Dacă pentru orice $i,j \in \{1,\dots,n\}$, $f_i|_{F_i \cap F_j} = f_j|_{F_i \cap F_j}$, atunci există o aplicaţie continuă $g:X \longrightarrow Y$ astfel încît $g|_{F_i}=f_i$, oricare ar fi $i \in \{1,\dots,n\}$.

Să ne reîntoarcem acum la notaţiile din 2.8 şi 2.13 şi să reformulăm rezultatele stabilite acolo în termenii aplicaţiilor continue. Atunci are loc:

2.63 Propoziţie. a) Topologia $\mathcal{S}$ pe W indusă de aplicaţia $g:W \longrightarrow X$, adică contraimaginea topologiei $\mathcal{T}$ prin aplicaţia g definită la 2.8, coincide cu cea mai puţin fină topologie $\mathcal{S}_1$ pe W astfel încît g să fie o aplicaţie continuă de la $(W, \mathcal{S}_1)$ în $(X, \mathcal{T})$.

b) Topologia $\mathcal{U}$ pe Y indusă de aplicaţia $f:X \longrightarrow Y$, adică imaginea topologiei $\mathcal{T}$ prin aplicaţia f definită la 2.8, coincide cu cea mai fină topologie $\mathcal{U}_1$ pe Y astfel încît f să fie o aplicaţie continuă de la $(X,\mathcal{T})$ în $(Y, \mathcal{U}_1)$. Mai general, topologia $\mathcal{U}$ indusă de familia de aplicaţii $\{f_t:X_t \longrightarrow Y\}_{t\in T}$ (v.2.13) coincide cu cea mai fină topologie $\mathcal{U}_1$ pe Y astfel încît f_t să fie o aplicaţie continuă de la $(X_t, \mathcal{T}_t)$ în $(Y, \mathcal{U}_1)$ pentru orice $t \in T$.

Demonstraţie. a) Să observăm întîi că din definiţia topologiei $\mathcal{S}$, g este o aplicaţie continuă de la $(W,\mathcal{S})$ în $(X,\mathcal{T})$, de unde rezultă că $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}$. Reciproc, pentru orice $S \in \mathcal{S}$, există $D \in \mathcal{T}$ astfel încît $S=g^{-1}(D)$. Dar pentru orice $D \in \mathcal{T}, g^{-1}(D) \in \mathcal{S}_1$ aşa încît $S \in \mathcal{S}_1$, adică $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}_1$. Deci $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1$.

b) Din definiţia topologiei $\mathcal{U}$ rezultă că f_t este o aplicaţie continuă de la $(X_t, \mathcal{T}_t)$ în $(Y,\mathcal{U})$ pentru orice $t \in T$, ceea ce implică $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}_1$. Reciproc, pentru orice $U \in \mathcal{U}_1$ şi orice $t \in T$, $f_t^{-1}(U) \in \mathcal{T}_t$, adică $U \in \mathcal{U}$ (v.2.13), deci $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}$.

Aşadar, $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1$.

Q. E. D.

2.64. Propoziţie. Fie W o mulţime, $\{(X_t, \mathcal{T}_t)\}_{t\in T}$ o familie arbitrară de spaţii topologice şi $\{g_t : W \to X_t\}_{t\in T}$ o familie de aplicaţii. Atunci există o topologie $\mathcal{U}$ pe W astfel încît $\mathcal{U}$ este cea mai puţin fină topologie pe W cu proprietatea că g_t este o aplicaţie continuă de la $(W, \mathcal{U})$ în $(X_t, \mathcal{T}_t)$ pentru orice $t \in T$.

Demonstraţie. Fie $\mathcal{M} = \{ g_t^{-1}(D_t) \mid D_t \in \mathcal{T}_t, t \in T \} \subseteq 2^W$ şi $\mathcal{U}$ cea mai puţin fină topologie pe W ce conţine pe $\mathcal{M}$ (v.2.32). Deoarece $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{U}$ este clar că g_t este o aplicaţie continuă de la $(W, \mathcal{U})$ în $(X_t, \mathcal{T}_t)$ pentru orice $t \in T$. Dacă $\mathcal{U}'$ este o topologie pe W astfel încît fiecare g_t să fie o aplicaţie continuă de la $(W, \mathcal{U}')$ în $(X_t, \mathcal{T}_t)$, atunci oricare ar fi $t \in T$ şi pentru orice $D_t \in \mathcal{T}_t$, $g_t^{-1}(D_t) \in \mathcal{U}'$, adică $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{U}'$. Dar $\mathcal{U}$ este cea mai puţin fină topologie pe W cu această proprietate, adică $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}'$.

Q. E. D.

2.65 Observaţie. Ţinînd seama de 2.38 rezultă că familia

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{t\in T_1} g_t^{-1}(D_t) \mid T_1 \text{ este o submulţime finită a lui } T,\ D_t \in \mathcal{T}_t \text{ pentru fiecare } t \in T_1 \right\}$$

este o bază pentru topologia $\mathcal{U}$ din propoziţia 2.64.

Topologii cît

Fie $(X, \mathcal{T})$ un spaţiu topologic, R o relaţie de echivalenţă pe X şi $q : X \to X/R$ proiecţia canonică.

2.66 Propoziţie. Pe X/R există o topologie unică, notată $\mathcal{T}/R$ şi numită topologia cît a topologiei $\mathcal{T}$ în raport

cu relaţia de echivalenţă R, acînd următoarele proprietăţi :

i) q este o aplicaţie continuă de la $(X,\mathcal{T})$ în $(X/R, \mathcal{T}/R)$;

ii) Dacă $(X,\mathcal{V})$ este un spaţiu topologic şi $f:X\to Y$ este o aplicaţie continuă de la $(X,\mathcal{T})$ în $(Y,\mathcal{V})$, compatibilă cu R, aplicaţia $\hat{f}:X/R \to Y$, asociată lui f (v.1.35), este o aplicaţie continuă de la $(X/R, \mathcal{T}/R)$ în $(Y,\mathcal{V})$.

Demonstraţie. Considerăm topologia $\mathcal{U} = \{V \mid q^{-1}(V) \in \mathcal{T}\} \subseteq 2^{X/R}$ pe X/R, imaginea topologiei $\mathcal{T}$ prin proiecţia canonică q (v.2.8 şi 2.9). q este atunci o aplicaţie continuă de la $(X,\mathcal{T})$ în $(X/R, \mathcal{U})$ [v.2.63, b)] . Să arătăm că topologia $\mathcal{U}$ satisface condiţia ii), adică $\hat{f}$ este o aplicaţie continuă de la $(X/R, \mathcal{U})$ în $(Y,\mathcal{V})$. Fie $V\in\mathcal{V}$. Atunci $D=f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$ şi deoarece f este compatibilă cu R, D este saturată în raport cu R (v.1.32) adică $D=q^{-1}(q(D))$ [v.1.33,5)] , ceea ce implică $q(D)\in\mathcal{U}$. Dar $f=\hat{f}\circ q$, astfel încît $D=(\hat{f}\circ q)^{-1}(V)=q^{-1}[(f)^{-1}(V)]$, deci $(\hat{f})^{-1}(V)=q(D)$ căci q este surjectivă [v.1.29,(7),b)] . Prin urmare, $(\hat{f})^{-1}(V) \in \mathcal{U}$, adică $\hat{f}$ este continuă.

Să dovedim acum unicitatea topologiei $\mathcal{U}$. Fie $\mathcal{U}'$ o altă topologie pe X/R ce satisface i) şi ii). Atunci ţinînd seama de i), aplicaţia q de la $(X,\mathcal{T})$ în $(X/R,\mathcal{U})$ este continuă, deci în baza lui ii), $\hat{q}=1_{X/R}$ este o aplicaţie continuă de la $(X/R,\mathcal{U})$ în $(X/R,\mathcal{U}')$, ceea ce implică $\mathcal{U}'\subseteq\mathcal{U}$ (v. observaţia ce precede 2.50). Similar, aplicaţia q de la $(X,\mathcal{T})$ în $(X/R,\mathcal{U})$ este continuă, astfel încît în baza lui ii), $\hat{q}=1_{X/R}$ este o aplicaţie continuă de la $(X/R,\mathcal{U})$ în $(X/R,\mathcal{U})$, adică $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{U}'$. Deci $\mathcal{U}=\mathcal{U}'$ şi $\mathcal{T}/R=\mathcal{U}$. Q.E.D.

2.67. Observaţii . 1) Mulţimea X/R dotată cu topologia cît $\mathcal{T}/R$ se numeşte spaţiu topologic cît.

2) In baza lui 2.63, b) şi a modului cum a fost definită topologia $\mathcal{T}/R(=\mathcal{U})$, rezultă că topologia cît mai poate fi caracterizată şi în următorul mod: $\mathcal{T}/R$ este cea mai fină topo-

logie pe X/R pentru care proiecţia canonică $q:X \longrightarrow X/R$ este continuă.

3) Fie R o relaţie de echivalenţă pe spaţiul topologic X. R se numeşte <u>deschisă</u> (respectiv <u>închisă</u>) dacă proiecţia canonică $q:X \longrightarrow X/R$ este o aplicaţie deschisă (respectiv închisă), unde X/R este dotat cu topologia cît. Pentru ca relaţia de echivalenţă R pe spaţiul topologic X să fie deschisă (resp.închisă) este necesar şi suficient ca saturata unei mulţimi deschise (resp. închise) din X să fie deschisă (resp.închisă) în X. In adevăr, fie D o mulţime deschisă din X. Dacă R este o relaţie de echivalenţă deschisă pe X, atunci $q(D)$ este deschisă în X/R, aşa încît saturata mulţimii D, $q^{-1}(q(D))$ este deschisă în X (v.definiţia topologiei cît din demonstraţia lui 2.66). Reciproc, dacă saturata $q^{-1}(q(D))$ a mulţimii D este deschisă în X, atunci $q(D)$ este deschisă în X/R (v.din nou definiţia topologiei cît din demonstraţia lui 2.66).

2.68 <u>Corolar</u> Dacă $f:X \longrightarrow Y$ este o aplicaţie continuă de la spaţiul topologic $(X,\mathcal{T})$ în $(X,\mathcal{V})$, atunci f_{sur} (resp.f_{inj}, resp.$\tilde{f}$) este o aplicaţie continuă de la $(X,\mathcal{T})$ pe $(f(X),\mathcal{V}_{f(X)})$ [resp. de la $(X/R_f, \mathcal{T}/R_f)$ în $(Y,\mathcal{V})$, resp. de la $(X/R_f,\mathcal{T}/R_f)$ pe $(f(X),\mathcal{V}_{f(X)})$].

<u>Demonstraţie</u>. In adevăr, continuitatea lui $f_{sur}:X \longrightarrow f(X)$ este o consecinţă imediată a observaţiei 2.58. Continuitatea lui f_{inj} este o consecinţă imediată a proprietăţii ii) din 2.66, căci f este compatibilă cu relaţia de echivalenţă R_f determinată de f (v.1.37); continuitatea lui $\tilde{f}$ este atunci o consecinţă a observaţiei 2.58.

Q. E. D.

2.69 <u>Corolar</u>. Dacă $f:X \longrightarrow Y$ este o aplicaţie continuă de la $(X,\mathcal{T})$ în $(Y,\mathcal{T}_1)$, R(respectiv R_1) o relaţie de echivalenţă

pe X (respectiv Y) astfel încît f să fie compatibilă cu R şi R_1 (v.1.35), atunci $\hat{f}: X/R \longrightarrow Y/R_1$ este o aplicaţie continuă de la $(X/R, \mathcal{T}/R)$ în $(Y/R_1, \mathcal{T}_1/R_1)$.

In adevăr, aplicaţia $q_{R_1Y} \circ f: X \longrightarrow Y/R_1$ este o aplicaţie continuă de la $(X, \mathcal{T})$ în $(Y/R_1, \mathcal{T}_1/R_1)$ (v.2.57), compatibilă cu R, aşa încît în baza proprietăţii ii) din 2.66, $\widehat{q_{R_1Y} \circ f} = \hat{f}$ este continuă.

2.70. Exemplu. Fie $Y = \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}$ cu topologia indusă de topologia obişnuită a lui $\mathbb{R}^{m+1}$ $(m \geq 0)$. Definim pe Y relaţia de echivalenţă $R_1: xR_1y$ dacă şi numai dacă există $\alpha \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ astfel încît $x = \alpha y$ $(x, y \in Y)$. Spaţiul topologic cît Y/R_1 se numeşte spaţiul proiectiv real cu m dimensiuni şi se notează cu $P\mathbb{R}^m$. $P\mathbb{R}^1$ se mai numeşte dreapta proiectivă reală, iar $P\mathbb{R}^2$ planul proiectiv real. Să introducem pe sfera unitate S^m $(S^m \subset \mathbb{R}^{m+1})$, relaţia de echivalenţă $R: xRy$ $(x, y \in S^m)$ dacă şi numai dacă $x = -y$ sau $x = y$. Aplicaţia de incluziune i a lui S^m în $\mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}$ este compatibilă cu R şi R_1, aşa încît ea va induce aplicaţia continuă.

$$\hat{i}: S^m/R \longrightarrow P\mathbb{R}^m, \quad \hat{i}([x]_R) = [x]_{R_1} \quad \text{(v.2.69)}.$$

Să mai observăm că aplicaţia continuă

$$r: \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\} \longrightarrow S^m, \quad r(x) = \frac{x}{\|x\|},$$

care este o retractă a lui i $(\forall x \in S^m,\ r \circ i(x) = r(x) = x$ deoarece $\|x\| = 1)$, este de asemenea compatibilă cu R_1 şi R, deci induce aplicaţia continuă

$$\hat{r}: P\mathbb{R}^m \longrightarrow S^m/R, \quad \hat{r}([x]_{R_1}) = [r(x)]_R = \left[\frac{x}{\|x\|}\right]_R$$

(v.2.69).

Homeomorfisme. Scufundări şi proiecţii topologice

2.71. Definiţie. Fie $(X, \mathcal{T})$ şi $(Y, \mathcal{U})$ spaţii topologice.

Printr-un homeomorfism f de la spaţiul topologic $(X,\mathcal{T})$ pe spaţiul topologic $(Y,\mathcal{U})$ vom înţelege o aplicaţie bijectivă $f:X\to Y$ astfel încît f este o aplicaţie continuă de la $(X,\mathcal{T})$ pe $(Y,\mathcal{U})$ şi f^{-1} este o aplicaţie continuă de la $(Y,\mathcal{U})$ pe $(X,\mathcal{T})$ (f^{-1} este concepută aici în sensul observaţiei 1.28). In acest caz spaţiile topologice $(X,\mathcal{T})$ şi $(Y,\mathcal{U})$ se zic homeomorfe sau topologic echivalente. Cînd nu există pericol de confuzie vom nota acest lucru prin: $X\sim Y$.

2.72 Observaţii. 1) Inversa unei aplicaţii continue bijective nu este în mod necesar continuă. De exemplu, fie X orice mulţime ce conţine mai mult decît un element. Atunci 1_X este o aplicaţie continuă de la $(X, 2^X)$ pe $(X, \{\emptyset, X\})$, dar inversa sa nu este continuă.

2) Faptul că aplicaţia f este un homeomorfism înseamnă atît faptul că ea aplică punctele lui X în punctele lui Y într-o manieră biunivocă, cît şi faptul că f aplică mulţimile deschise ale lui X în mulţimile deschise ale lui Y într-o manieră biunivocă.

3) Relaţia de homeomorfism "$\sim$" este o relaţie de echivalenţă.

4) Compunerea a două homeomorfisme este tot un homeomorfism Acest fapt este o consecinţă imediată a lui 2.71 şi a lui 2.57. De asemenea, inversul unui homeomorfism este tot un homeomorfism. Ţinînd seama de aceste observaţii, rezultă că operaţia de compunere determină pe mulţimea homeomorfismelor unui spaţiu topologic X pe el însuşi o structură de grup. Grupul corespunzător se numeşte grupul homeomorfismelor lui X şi va fi notat cu $\mathrm{Homeo}(X)$. Conform punctului de vedere introdus de Felix Klein în lucrarea sa din 1872, cunoscută sub numele de Programul de la Erlangen, vom da

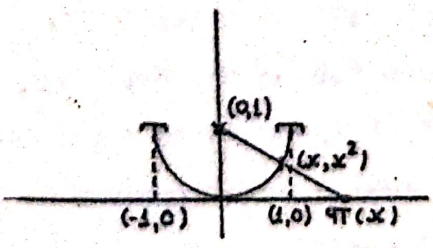
următoarea definiţie: Se numeşte <u>geometrie topologică</u> a spaţiului topologic X, studiul proprietăţilor mulţimilor de puncte din X care sînt păstrate de orice homeomorfism al lui Homeo(X). Aceste proprietăţi se vor numi <u>topologice.</u> De exemplu, proprietatea unei mulţimi din X de a fi deschisă în X este o proprietate topologică. Tot topologică este proprietatea unei mulţimi din X de a fi închisă, sau după 2.50 (b) proprietatea unei mulţimi din X de a fi densă în X. De asemenea, proprietatea unei mulţimi din X de a fi rară (resp. slabă, resp. un rezidual) este topologică.

2.73 <u>Exemple.</u> 1) Dacă X este o mulţime dotată cu topologia cofinită [v.2.5,3)], atunci orice bijecţie a lui X este un homeomorfism.

2) (-1,1) şi $\mathbb{R}$ sînt homeomorfe; în adevăr, există aplicaţia continuă bijectivă $\pi : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}, \pi(x) = \frac{x}{1-x^2}$, a cărei inversă $\pi^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow (-1,1)$,

$$\pi^{-1}(y) = \begin{cases} \dfrac{-1+\sqrt{1+4y^2}}{2y} & \text{dacă } y \neq 0, \\ 0 & \text{dacă } y = 0, \end{cases}$$

este de asemenea continuă. Geometric, această aplicaţie poate fi concepută ca fiind "proiecţia stereografică" (v.şi exemplele ce succed lui 5.5o) din $(0,1) \in \mathbb{R}^2$ a porţiunii din parabolă $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y=x^2 \text{ şi } x \in (-1,1)\}$



pe dreapta $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$.

3) Dacă $Y = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_1|+\ldots+|x_n| = 1\}$ este dotat cu topologia indusă de topologia obişnuită a lui $\mathbb{R}^n$, atunci spaţiile topologice S^{n-1} şi Y sînt homeomorfe, ($n \geqslant 2$). In

adevăr, există bijecţia continuă

$$f:S^{n-1}\longrightarrow Y,\ f(x_1,\dots,x_n)=\left(\frac{x_1}{\sum_{i=1}^{n}|x_i|},\dots,\frac{x_n}{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}\right),$$

a cărei inversă

$$f^{-1}:Y\longrightarrow S^{n-1},\ f^{-1}(x_1,\dots,x_n)=\left(\frac{x_1}{\|x\|},\dots,\frac{x_n}{\|x\|}\right),\ \text{unde}$$

$x=(x_1,\dots,x_n)$, este de asemenea continuă (cititorul va verifica că această aplicaţie este într-adevăr inversa lui f!).

4) Dacă $X=\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\subset\mathbb{R}^n$, $Y=\left\{(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}\mid\sum_{i=1}^{n}x_i^2=1\right\}\subset$ $\subset\mathbb{R}^{n+1}$ şi $Z=\left\{(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}\mid x_1^2+\dots+x_n^2-x_{n+1}^2=1\right\}\subset\mathbb{R}^{n+1}$ sînt înzestrate cu topologiile induse de topologiile obişnuite ale spaţiilor reale aritmetice via incluziunilor menţionate, atunci ele sînt spaţii topologice homeomorfe. In adevăr, există bijecţia continuă.

$$g:X\longrightarrow Y,\ g(x_1,\dots,x_n)=\left(\frac{x_1}{\|x\|},\dots,\frac{x_n}{\|x\|},\ln\|x\|\right),\ \text{unde}$$

$x=(x_1,\dots,x_n)$, a cărei inversă

$$g^{-1}:Y\longrightarrow X,\ g^{-1}(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})=(x_1e^{x_{n+1}},\dots,x_ne^{x_{n+1}})$$

este continuă. De asemenea, există bijecţia continuă

$$h:Y\longrightarrow Z,\ h(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})=(x_1\sqrt{1+x_{n+1}^2},\dots,x_n\sqrt{1+x_{n+1}^2},x_{n+1}),$$

a cărei inversă

$$h^{-1}:Z\longrightarrow Y,\ h^{-1}(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})=\left(\frac{x_1}{\sqrt{1+x_{n+1}^2}},\dots,\frac{x_n}{\sqrt{1+x_{n+1}^2}},x_{n+1}\right)$$

este continuă (cititorul va verifica că aceste aplicaţii sînt într-adevăr inverse una alteia!). Să remarcăm cu această ocazie că Y nu este altceva decît "hipercilindrul" $S^{n-1}\times\mathbb{R}$, iar Z este hiperboloidul de indice n din $\mathbb{R}^{n+1}$.

5) Dacă $D^p\times D^q$ este dotat cu topologia indusă de topolo-

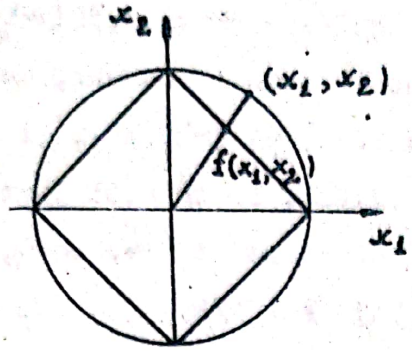
gia obişnuită a lui $\mathbb{R}^{p+q}$ $(p \geq 1,\ q \geq 1)$, atunci aplicaţia

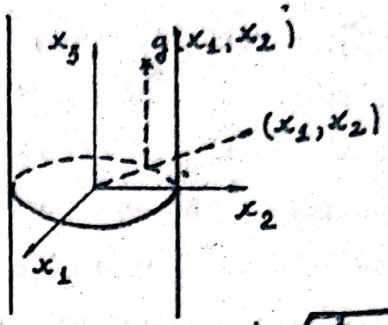
$$\varphi : D^p \times D^q \longrightarrow D^{p+q} \quad , \text{ definită prin}$$

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\|y\|}{\sqrt{\|x\|^2+\|y\|^2}}\,(x,y) & \text{pentru } 0<\|x\|\leq\|y\| \text{ sau } 0\leq\|x\|<\|y\|\ , \\ \dfrac{\|x\|}{\sqrt{\|x\|^2+\|y\|^2}}\,(x,y) & \text{pentru } 0<\|y\|\leq\|x\| \text{ sau } 0\leq\|y\|<\|x\|\ , \\ 0 & \text{pentru } x=y=0, \end{cases}$$

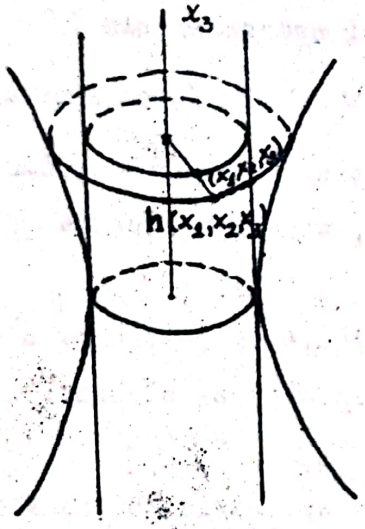
este un homeomorfism (cititorul va verifica în detaliu această afirmaţie!). In particular, spaţiile topologice $D^1 \times \ldots \times D^1$ (n-ori) şi D^n sînt **homeomor...**.

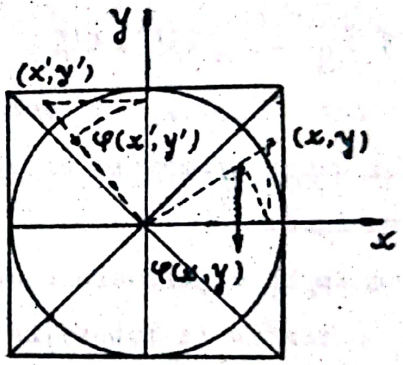
Utilizînd cele stabilite la 2.58, 2.59, 2.49,6), 2.60, 2.57 şi 2.61, propunem drept exerciţiu cititorului **să** dea o justificare **detaliată** a continuităţii aplicaţiilor f, f^{-1}, g, g^{-1}, h, h^{-1}, φ, φ^{-1} din exemplele 2) - 4). De asemenea, în cazul $n=2$ şi $p=q=1$, îi sugerăm să precizeze motivaţiile geometrice care au stat la baza obţinerii expresiilor analitice ale lui f, g, h, φ şi f^{-1}, g^{-1}, h^{-1}, φ^{-1}.





Cota lui $g(x_1,x_2)$ este $\ln\sqrt{x_1^2+x_2^2}$





$\varphi(x,y) = \lambda(x,y)$, $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$,
unde $\|\lambda(x,y)\| = \|x\|$

6) Aplicaţia $\hat{r}: P\mathbb{R}^m \longrightarrow S^m/R$ $(m \geqslant 0)$ definită în exemplul 2.7o este un homeomorfism. In adevăr, aplicaţia $\hat{r}$ este continuă (v.27O) şi inversa ei este $\hat{i}$, căci

$$\hat{i}(\hat{r}([x]_{R_1})) = \hat{i}\left(\left[\frac{x}{\|x\|}\right]_R\right) = \left[\frac{x}{\|x\|}\right]_{R_1} = [x]_{R_1} ,$$

şi

$$\hat{r}(\hat{i}([x]_R)) = \hat{r}([x]_{R_1}) = [r(x)]_R = \left[\frac{x}{\|x\|}\right]_R = [x]_R ,$$

deoarece $\|x\| = 1$, care este de asemenea continuă (v.27o). In particular, $P\mathbb{R}^0$ va consta dintr-un singur punct căci $S^0 = \{-1, 1\}$.

7) Fie $(X, \mathcal{T})$ un spaţiu topologic, R o relaţie de echivalenţă pe X, $q: X \longrightarrow X/R$ proiecţia canonică, $S \subseteq X$ o submulţime deschisă (resp. închisă) nevidă saturată a lui X (v.1.32)

$i:S \subset X$ injecţia canonică şi R_S relaţia de echivalenţă indusă de R pe S. Aplicaţia bijectivă $j:S/R_S \longrightarrow q(S)$, $j([s]_{R_S}) = [i(s)]_R = q(i(s))$, $s \in S$, este un homeomorfism. In adevăr, deoarece aplicaţia $\hat{i}:S/R_S \longrightarrow X/R$ este continuă (v.2.69), şi aplicaţia $j=(\hat{i})_{sur}$ va fi continuă (v.2.68). Pe de altă parte, presupunînd că S este deschisă şi ţinînd seama că $j \circ q_S = q \circ i$, rezultă că dacă $U \in \mathcal{T}_S/R_S$, atunci $j(U) \in (\mathcal{T}/R)_{q(S)}$, adică j este o aplicaţie deschisă. Pentru aceasta n-avem decît să observăm egalitatea $j(U)=q(i(q_S^{-1}(U)))$ şi apartenenţele $q_S^{-1}(U) \in \mathcal{T}_S$, $i(q_S^{-1}(U)) \in \mathcal{T}$, $q(i(q_S^{-1}(U))) \in \mathcal{T}/R$. Similar, dacă S este închisă, j este o aplicaţie închisă. Dar, dacă j este o bijecţie deschisă (resp.închisă), atunci aplicaţia j^{-1} va fi continuă.

Vom da în continuare o condiţie suficientă pentru ca o anumită aplicaţie ce intervine frecvent în diverse situaţii să fie un homeomorfism.

2.74 Propoziţie. Fie $f:X \longrightarrow Y$ o aplicaţie continuă de la spaţiul topologic $(X,\mathcal{T})$ în $(Y,\mathcal{U})$. Dacă f este deschisă (sau închisă), atunci aplicaţia bijectivă $\tilde{f}:X/R_f \longrightarrow f(X)$ (v.1.36) este un homeomorfism al spaţiului topologic $(X/R_f, \mathcal{T}/R_f)$ pe spaţiul topologic $(f(X), \mathcal{U}_{f(X)})$. In particular, dacă $f:X \longrightarrow Y$ este o injecţie (respectiv surjecţie) continuă deschisă (sau închisă), atunci aplicaţia $\tilde{f}=f_{sur}:X \longrightarrow f(X)$ [respectiv $\tilde{f}=f_{inj}:X/R_f \longrightarrow Y$] este un homeomorfism (v.şi 1.37).

Demonstraţie. Să presupunem că aplicaţia $f:X \longrightarrow Y$ este deschisă. Atunci, în particular, $f(X)$ va fi deschisă în Y. Fie diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ X/R_f & \xrightarrow{\tilde{f}} & f(X) \end{array}$$

stabilită la 1.36, unde q este proiecţia canonică, i aplicaţia de incluziune, iar $\tilde{f}$ este bijecţie. $\tilde{f}$ este o aplicaţie continuă (v.2.68). Pentru a dovedi că $\tilde{f}^{-1}$ este continuă, va fi suficient să arătăm că $\tilde{f}$ este o aplicaţie deschisă. Fie $U \in \mathcal{T}/R_f$ Atunci $q^{-1}(U) \in \mathcal{T}$ şi deci $f(q^{-1}(U)) \in \mathcal{U}$, căci f este deschisă (v.2.54). Deoarece $f=i\circ\tilde{f}\circ q$ şi q este surjectivă, rezultă $f(q^{-1}(U)) = i(\tilde{f}(U))$ [v.1.29,(7),b)], aşa încît $i(\tilde{f}(U)) \in \mathcal{U}$. Dar $f(X)$ este deschisă în Y, deci $\tilde{f}(U) \in \mathcal{U}_{f(X)}$ (v.2.11), adică $\tilde{f}$ este deschisă şi prin urmare $\tilde{f}$ este un homeomorfism.

Similar se procedează în cazul cînd $f:X \longrightarrow Y$ este o aplicaţie închisă.

Ultima afirmaţie este atunci o consecinţă imediată a consideraţiilor de la 1.37.

Q. E. D.

Exemple. 1) Spaţiile topologice $P\,\mathbb{R}^1$ şi S^1 sînt homeomorfe. In adevăr, aplicaţia continuă surjectivă $p:S^1 \longrightarrow S^1$, $p(z)=z^2$ (S^1 este conceput ca submulţime a lui $\mathbb{C}$, deci a lui $\mathbb{R}^2$) induce un homeomorfism $\tilde{p}: S^1/R \longrightarrow S^1$, unde R este relaţia de echivalenţă definită la 2.70. In acest scop n-avem decît să observăm că $R=R_p$ şi că aplicaţia p este deschisă, aşa încît p induce homeomorfismul $\tilde{p}$ (v.2.74). Deoarece $\hat{r}:P\,\mathbb{R}^1 \longrightarrow S^1/R$ este homeomorfism [v.2.73,6)], rezultă că $\tilde{p}\circ\hat{r}$ este un homeomorfism al lui $P\,\mathbb{R}^1$ pe S^1.

2) Dacă concepem $T^n=S^1x...xS^1$ (n-ori) cu topologia indusă de $\mathbb{C}^n$ (T^n se numeşte <u>torul n-dimensional</u>), atunci surjecţia continuă $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow T^n$, $f(x_1,...,x_n)=(e^{2\pi ix_1},...,e^{2\pi ix_n})$ induce bijecţia continuă $\tilde{f}=f_{inj}: \mathbb{R}^n/R_f \longrightarrow T^n$, unde xR_fy ($x,y \in \mathbb{R}^n$) dacă şi numai dacă $x-y \in \mathbb{Z}^n$ (v.2.68). Cu alte cuvinte spaţiul factor $\mathbb{R}^n/R_f$ nu este altceva decît grupul aditiv cît $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Deoarece f este

o aplicaţie deschisă, aplicaţia $\tilde{f}: \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \longrightarrow T^n$ este un homeomorfism. Deci torul n-dimensional este homeomorf cu spaţiul topologic cît $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

2.75 Observaţie. Bijecţia continuă $\tilde{f}: X/R_f \longrightarrow f(X)$ asociată unei aplicaţii continue $f: X \longrightarrow Y$ nu este în mod necesar un homeomorfism. De exemplu, fie injecţia continuă $f: [0,2) \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x)=(\cos \pi x, \sin \pi x)$, unde $[0,2)$ este cu topologia indusă de topologia obişnuită a lui $\mathbb{R}$. Atunci $f([0,2))=S^1$ şi bijecţia continuă $\tilde{f}=f_{sur}: [0,2) \longrightarrow S^1$ nu este homeomorfism. In adevăr, $[0,1)=(-1,1)\cap[0,2)$ este deschisă în $[0,2)$, dar $\tilde{f}([0,1))=f([0,1))$ nu este deschisă în S^1.

Fie $(X,\mathcal{T})$ şi $(Y,\mathcal{U})$ spaţii topologice.

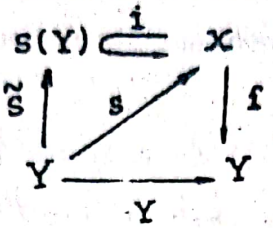
2.76. Definiţie. O injecţie continuă $f: X \longrightarrow Y$ astfel încît $\tilde{f}=f_{sur}: X \longrightarrow f(X)$ este un homeomorfism se numeşte scufundare topologică a lui X în Y.

De exemplu, în baza lui 2.74, orice injecţie continuă deschisă (sau închisă) $f: X \longrightarrow Y$ este o scufundare topologică. Alt exemplu de scufundare topologică este oferit de următoarea propoziţie.

2.77 Propoziţie. Dacă $s: Y \longrightarrow X$ este o secţiune continuă a surjecţiei continue $f: X \longrightarrow Y$, atunci s este o scufundare topologică.

Demonstraţie. Deoarece $f \circ s = 1_Y$, rezultă că s este o aplicaţie injectivă [v.12o,3)] ; trebuie să verificăm că bijecţia continuă $\tilde{s}: Y \longrightarrow s(Y)$ este un homeomorfism, ceea ce revine la a arăta că $\tilde{s}$ este o aplicaţie deschisă: dacă U este o mulţime deschisă arbitrară din Y ($U \in \mathcal{U}$), vom dovedi că $\tilde{s}(U)$ este deschisă în $s(Y)$. In acest scop, să considerăm aplicaţia de incluziune $i: s(Y) \subset X$ şi să observăm că aplicaţia $f \circ i: s(Y) \longrightarrow Y$ este injectivă. In adevăr, dacă $u_1, u_2 \in s(Y)$ şi $(f \circ i)(u_1) =$

$= (f \circ i)(u_2)$, adică $f(u_1)=f(u_2)$, putem scrie $u_1=s(y_1)$, $u_2=s(y_2)$, $y_1, y_2 \in Y$, astfel încît $f(s(y_1))=f(s(y_2))$, de unde rezultă $y_1=y_2$, şi deci $u_1=u_2$. Din comutativitatea diagramei



obţinem $U=(f \circ s)(U)=(i \circ i)(\tilde{s}(U))$, de unde deducem că $\tilde{s}(U)=(f \circ i)^{-1}(U)$, căci $f \circ i$ este injectivă [v.129,(6),b)]. Deci $\tilde{s}(U)=i^{-1}(f^{-1}(U))=s(Y) \cap f^{-1}(U)$, ceea ce arată că $\tilde{s}(U)$ este deschisă în $s(Y)$.

Q. E. D.

2.78 Corolar. Dacă $s:Y \longrightarrow X$ este o secţiune continuă a surjecţiei continue $f:X \longrightarrow Y$, atunci s este o aplicaţie deschisă (respectiv închisă) dacă şi numai dacă $s(Y)$ este deschisă (respectiv închisă) în X.

Demonstraţie. Dacă s este o aplicaţie deschisă (resp. închisă), atunci evident că $s(Y)$ este o mulţime deschisă (resp. închisă) din X. Reciproc, să presupunem că $s(Y)$ este deschisă în X. Atunci aplicaţia de incluziune $i:s(Y) \subset X$ este deschisă (v. exemplul ce succede lui 2.54). Dacă U este o mulţime deschisă în Y, atunci $\tilde{s}(U)$ este deschisă în $s(Y)$ (v.2.77), astfel încît $s(U)=i(\tilde{s}(U))$ va fi deschisă în X.

Q. E. D.

Observaţie. In general, dacă o injecţie continuă este o scufundare topologică, ea nu este în mod necesar şi o aplicaţie deschisă. De exemplu, aplicaţia continuă $f:X \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y)=x$, unde $X=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2-y^2=-1 \text{ sau } x^2-y^2=0\}$ este dotat cu topologia indusă de topologia obişnuită a lui $\mathbb{R}^2$, are şase secţiuni continue $s_i: \mathbb{R} \longrightarrow X$, definite respectiv prin: $s_1(t)=(0,t)$, $s_2(t)=$

$=(t,-t)$, $s_3(t)=(t,|t|)$, $s_4(t)=(t,-|t|)$, $s_5(t)=(t,\sqrt{1+t^2})$, $s_6(t)=$ $=(t,-\sqrt{1+t^2})$, $t\in\mathbb{R}$. Secţiunile s_i, $i=1,2,3,4$, deşi sînt scufundări topologice (v.2.77), nu sînt aplicaţii deschise deoarece submulţimile $s_i(\mathbb{R})$ nu sînt deschise în X. In schimb ele sînt aplicaţii închise.

Un exemplu foarte important de scufundare topologică este dat de următoarea teoremă a lui L.E.J. Brouwer: orice injecţie continuă $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ este o aplicaţie deschisă - deci o scufundare topologică (v.2.74). In particular, pentru o asemenea aplicaţie f, $f(\mathbb{R}^n)$ este deschisă în $\mathbb{R}^n$. Pentru demonstraţia acestei teoreme fundamentale a topologiei , v.de exemplu [6].

2.79 Definiţie. O surjecţie continuă $f:X\longrightarrow Y$ astfel încît $\tilde{f}=f_{inj}:X/R_f\longrightarrow Y$ este un homeomorfism se numeşte proiecţie topologică a lui X pe Y.

Astfel, în baza lui 2.74, orice surjecţie continuă deschisă (sau închisă) $f:X\longrightarrow Y$ este o proiecţie topologică.

De exemplu, surjecţia continuă $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{T}^n$, $f(x_1,\ldots,x_n)=$ $=(e^{2\pi ix_1},\ldots,e^{2\pi ix_n})$, unde $\mathbb{T}^n$ este torul n-dimensimal, considerată într-un exemplu precedent, este o proiecţie topologică, căci f este o aplicaţie deschisă.

Dacă $(X,\mathcal{T})$ este un spaţiu topologic şi R o relaţie de echivalenţă pe X, atunci proiecţia canonică $q:X\longrightarrow X/R$ este o proiecţie topologică de la $(X,\mathcal{T})$ pe $(X/R,\mathcal{T}/R)$. In adevăr, în acest caz $R_q=R$ şi $\tilde{q}=q_{inj}=1_{X/R}$. Pentru alte exemple, [v. 4.25)].

Cu ajutorul conceptelor de scufundare topologică şi proiecţie topologică putem da şi alte condiţii suficiente, de tipul celor din 2.56, pentru continuitatea unei aplicaţii.

2.80. Propoziţie. Fie X,Y,Z spaţii topologice, $g:X\longrightarrow Y$ şi $f:Y\longrightarrow Z$ aplicaţii astfel încît $f\circ g:X\longrightarrow Z$ să fie continuă.

a) Dacă f este o scufundare topologică, atunci g este continuă;

b) Dacă g este o proiecţie topologică, atunci f este continuă.

Demonstraţie. a) Fie D o mulţime deschisă în Y. Deoarece f este o scufundare topologică, există o mulţime deschisă $U=f(D)$ în $f(Y)$ astfel încît $D=f^{-1}(U)$. Dar atunci

$$g^{-1}(D) = g^{-1}(f^{-1}(U))=(f\circ g)^{-1}(U)$$

este deschisă în X, căci $f\circ g : X \longrightarrow f(Y)$ este continuă (v.2.58).

b) Fie $q:X \longrightarrow X/R_g$ proiecţia canonică şi U o mulţime deschisă din Z. Atunci $U'=(f\circ g)^{-1}(U)=g^{-1}(f^{-1}(U))$ este deschisă în X. Egalitatea $U'=g^{-1}(f^{-1}(U))$ arată că U' este o mulţime saturată în raport cu relaţia de echivalenţă R_g, adică $U'=q^{-1}(q(U'))$ [v.1.33,5)], ceea ce înseamnă că $q(U')$ este deschisă în X/R_g (v.2.66). Deoarece $\tilde{g}:X/R_g \longrightarrow Y$ este un homeomorfism, rezultă că $\tilde{g}(q(U'))$ este deschisă în Y. Pe de altă parte, aceeaşiegalitate $U'= g^{-1}(f^{-1}(U))$ implică $f^{-1}(U)=g(U')$, căci g este surjectivă [v.1.29,(7),b)], de unde rezultă $f^{-1}(U)=\tilde{g}(q(U'))$, deoarece $g=\tilde{g}\circ q$. Deci $f^{-1}(U)$ este deschisă în Y, adică f este continuă.

Q. E. D.

CAPITOLUL III

DOUA CLASE SPECIALE DE SPATII TOPOLOGICE : SPATII COMPACTE SI SPATII METRICE

Acoperiri

3.1. Definiţie. Fie X o mulţime. O familie $\mathcal{V} \subset 2^X$ se numeşte o acoperire a lui X dacă $\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V = X$. Fie $(X, \mathcal{T})$ un spaţiu topologic. O acoperire deschisă pentru $(X, \mathcal{T})$ este o subfamilie $\mathcal{V}$ a lui $\mathcal{T}$ astfel încît $\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V = X$.

3.2. Propoziţie. Fie $(X, \mathcal{T})$ un spaţiu topologic, D o submulţime a lui X şi $\mathcal{V}$ o acoperire deschisă pentru $(X, \mathcal{T})$. Atunci $D \in \mathcal{T}$ dacă şi numai dacă pentru fiecare $V \in \mathcal{V}$, $D \cap V$ este deschisă în V.

Demonstraţie. Dacă $D \in \mathcal{T}$, atunci în baza definiţiei topologiei induse, $D \cap V$ este deschisă în V (v. 2.10). Reciproc, fie $D \subset X$ astfel încît pentru fiecare $V \in \mathcal{V}$, $D \cap V$ este deschisă în V. Deoarece $V \in \mathcal{T}$, $D \cap V \in \mathcal{T}$ (v. 2.11). Pe de altă parte,

$$D = D \cap X = D \cap \left(\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V\right) = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} (D \cap V)$$

astfel încît în baza condiţiei (3) din 2.4, $D \in \mathcal{T}$.

Q. E. D.

3.3 Corolar. Fie $f : X \longrightarrow Y$ o aplicaţie continuă între spaţiile topologice X şi Y şi fie $\mathcal{V}$ o acoperire deschisă pentru X. Atunci f este continuă dacă şi numai dacă pentru fiecare $V \in \mathcal{V}$, $f|_V$ este continuă. In particular, fie $\mathcal{T}_1$ şi $\mathcal{T}_2$ două topologii pe mulţimea X şi $\mathcal{V}$ o acoperire atît pentru

spaţiul topologic $(X, \mathcal{T}_1)$ cît şi pentru spaţiul topologic $(X, \mathcal{T}_2)$. Atunci $\mathcal{T}_1$ şi $\mathcal{T}_2$ coincid dacă şi numai dacă topologiile induse pe fiecare din elementele lui $\mathcal{V}$ coincid.

Demonstraţie. Dacă f este continuă, atunci pentru orice $V \in \mathcal{V}$, $f|_V$ este continuă [v.2.49,4)]. Reciproc, să presupunem că pentru fiecare $V \in \mathcal{V}$, $f|_V$ este continuă şi fie D o mulţime deschisă din Y. In baza lui 3.2, $f^{-1}(D)$ este deschisă în X dacă şi numai dacă pentru fiecare $V \in \mathcal{V}$, $f^{-1}(D) \cap V$ este deschisă în V. Dar $f^{-1}(D) \cap V = (f|_V)^{-1}(D)$ este deschisă în V, căci $f|_V$ este continuă.

Fie acum $\mathcal{T}_1$ şi $\mathcal{T}_2$ două topologii pe mulţimea X, $\mathcal{V} \subset \mathcal{T}_1$, $\mathcal{V} \subset \mathcal{T}_2$ şi $\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V = X$. Atunci $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 \iff 1_X : X \to X$ este un homeomorfism al lui $(X, \mathcal{T}_1)$ pe $(X, \mathcal{T}_2) \iff$ pentru fiecare $V \in \mathcal{V}$, $1_X|_V : V \to V$ este un homeomorfism al lui $(V, (\mathcal{T}_1)_V)$ pe $(V, (\mathcal{T}_2)_V) \iff$ pentru fiecare $V \in \mathcal{V}$, $(\mathcal{T}_1)_V = (\mathcal{T}_2)_V$.

Q. E. D.

3.4 Definiţie. Fie $(X, \mathcal{T})$ un spaţiu topologic şi $S \subseteq X$. O familie $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$ astfel încît $S \subseteq \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V$ se numeşte o X-acoperire pentru S. Dacă $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$ este o X-acoperire pentru $S \subseteq X$, atunci familia $\{ V \cap S \mid V \in \mathcal{V} \}$ este o acoperire deschisă pentru spaţiul topologic $(S, \mathcal{T}_S)$, numită acoperirea indusă. In adevăr, $\{ V \cap S \mid V \in \mathcal{V} \} \subseteq \mathcal{T}_S$ şi $S = S \cap (\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V) = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} (S \cap V)$.

De exemplu, familia $\{ (-2,2), (0,3) \}$ este o R-acoperire pentru intervalul închis $[0,2]$. Acoperirea indusă este familia $\{ [0,2), (0,2] \}$.

Din definiţia topologiei induse (v.2.10) rezultă că orice acoperire pentru $(S, \mathcal{T}_S)$ este indusă de o X-acoperire pentru S, care în general nu este unică.

3.5. Propoziţie Fie $(X, \mathcal{T})$ un spaţiu topologic, $S \subseteq X$,

$\mathcal{V}$ o X-acoperire pentru S şi $\mathcal{P}$ acoperirea indusă pentru $(S, \mathcal{T}_S)$. Atunci există o subfamilie finită $\mathcal{P}_1$ a lui $\mathcal{P}$ ce acoperă $(S, \mathcal{T}_S)$ dacă şi numai dacă există o subfamilie finită $\mathcal{V}_1$ a lui $\mathcal{V}$ ce este o X-acoperirea pentru S.

Demonstraţie. Să presupunem că există o subfamilie finită $\mathcal{P}_1$ a lui $\mathcal{P} = \{ V \cap S \mid V \in \mathcal{V} \}$, anume $\mathcal{P}_1 = \{ V_\alpha \cap S \mid V_\alpha \in \mathcal{V}, \alpha = 1,\dots,k \}$, astfel încît $S = \bigcup_{\alpha=1}^{k} (V_\alpha \cap S)$. In acest caz,

$$S = S \cap \left(\bigcup_{\alpha=1}^{k} V_\alpha \right) \subset \bigcup_{\alpha=1}^{k} V_\alpha ,$$

adică subfamilie finită $\mathcal{V}_1 = \{ V_\alpha \mid \alpha = 1,\dots,k \}$ a lui $\mathcal{V}$ este o X-acoperire a lui S. Reciproc, fie $\mathcal{V}_1 = \{ V_1,\dots,V_k \}$ o subfamilie finită a lui $\mathcal{V}$ astfel încît $S \subset \bigcup_{\alpha=1}^{k} V_\alpha$. Dacă notăm cu $\mathcal{P}_1 = \{ V_\alpha \cap S \mid \alpha = 1,\dots,k \}$ acoperirea indusă de $\mathcal{V}_1$, atunci $\mathcal{P}_1$ este o subfamilie finită a lui $\mathcal{P}$ ce este o acoperire pentru $(S, \mathcal{T}_S)$.

Q. E. D.

3.6. Propoziţie (proprietatea de acoperire a lui Lindelöf) Fie $(X, \mathcal{T})$ un spaţiu topologic, $\mathcal{B} = \{ B_1,\dots,B_n,\dots \}$ o bază finită sau numărabilă pentru topologia $\mathcal{T}$, adică $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \mathcal{T}$ (v.2.34) şi $S \subseteq X$ o mulţime. Atunci orice X-acoperire pentru S conţine o X-acoperire finită sau numărabilă pentru S.

Demonstraţie. Fie $\mathcal{U} = \{ U_\alpha \}$ o X-acoperire pentru S, adică $S \subseteq \bigcup_\alpha U_\alpha$ şi U_α sînt mulţimi deschise ale lui X pentru orice α. Fie $\{ B_{n_1}, B_{n_2},\dots \}$ familia formată din mulţimi ale bazei $\mathcal{B}$ avînd proprietatea că B_{n_k} este conţinut într-un U_α. S-ar putea întîmpla ca mulţimea B_{n_k} să fie conţinută în mai multe mulţimi de tip U_α. Să alegem una din aceste mulţimi U_α şi s-o notăm cu U_{α_k}. Deci $B_{n_k} \subset U_{\alpha_k}$. Pe de altă parte, pentru orice $x \in S$, există β astfel încît $x \in U_\beta$. Deoarece U_β este deschisă şi U_β este o uniune de mulţimi de

tip B_n rezultă că există $m > o$ astfel încît $x \in B_m \subset U_p$. Prin construcţie, $m=n_j$ şi $x \in B_{n_j} \subset U_{\alpha_j}$.

Deci $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} U_{\alpha_k}$, adică $S \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} U_{\alpha_k}$ şi $\{U_{\alpha_k} | k=1,2,\ldots\}$ este o X-acoperire finită sau numărabilă pentru S.

Q. E. D.

Spaţii compacte

3.7. Definiţie. Un spaţiu topologic $(X,\mathcal{T})$ se numeşte compact [*] dacă pentru orice acoperire deschisă $\mathcal{V}$ pentru $(X,\mathcal{T})$ există o subfamilie $\mathcal{V}_1$ a lui $\mathcal{V}$ astfel încît:

1. $\mathcal{V}_1$ este o familie finită;
2. $\mathcal{V}_1$ este o acoperire (deschisă) pentru $(X,\mathcal{T})$.

Cu alte cuvinte, un spaţiu topologic $(X,\mathcal{T})$ este compact dacă pentru orice acoperire deschisă $\mathcal{V}$ pentru $(X,\mathcal{T})$, există un număr finit de mulţimi $V_1,\ldots,V_k \in \mathcal{V}$ astfel încît $X = \bigcup_{i=1}^{k} V_i$. Dacă $(X,\mathcal{T})$ este un spaţiu topologic, o submulţime $S \subset X$ se numeşte compactă, dacă spaţiul topologic $(S, \mathcal{T}_S)$ este compact.

3.8. Observaţii. 1) Fie $(X,\mathcal{T})$ un spaţiu topologic. Din 3.5 rezultă imediat că mulţimea $S \subset X$ este compactă dacă şi numai dacă din orice X-acoperire pentru S se poate extrage o subfamilie finită ce este de asemenea o X-acoperire pentru S.

---

[*] Unii autori înţeleg prin spaţii compacte acele spaţii topologice care pe lîngă condiţiile din definiţia 3.7 mai verifică şi axioma de separaţie T_2 (Hausdorff) (v.5.1.). De exemplu, în cărţile lui Bourbaki prin spaţiu "compact" se înţelege un astfel de spaţiu topologic.

2) O submulţime compactă S a unui spaţiu metric X este mărginită. In adevăr, să reamintim întîi că o submulţime S din X este mărginită dacă există o celulă deschisă B în X astfel încît $S \subset B$. Să considerăm familia $\mathcal{V}$ a tuturor celulelor deschise de rază 1 ale căror centre sînt punctele din S. Deoarece S este compactă, o subfamilie finită a lui $\mathcal{V}$ acoperă S, de unde rezultă imediat că S este mărginită.

3.9. Exemple. 1) Dacă X este o mulţime finită, atunci orice spaţiu topologic $(X, \mathcal{T})$ este un spaţiu compact. Dacă X este o mulţime arbitrară şi $\mathcal{T}$ este topologia trivială pe X [v. 2.5, 3)] , atunci $(X, \mathcal{T})$ este compact. Spaţiul topologic $(X, 2^X)$ este compact dacă şi numai dacă X este o mulţime finită (v.şi demonstraţia lui 3.15).

2) In analiza clasică se arată că orice interval închis şi mărginit de pe axa reală $\mathbb{R}$, cu topologia obişnuită, este un compact (teorema lui Heine-Borel). Dimpotrivă, intervalul $(0,1]$ din $\mathbb{R}$ nu este compact, deoarece nici o subfamilie finită a acoperirii deschise $\left\{\left(\frac{1}{n+1}, 1\right] \mid n=1,2,\ldots\right\}$ nu acoperă intervalul $(0,1]$. De asemenea, un interval deschis din $\mathbb{R}$ nu este compact.

3) O submulţime S a unui spaţiu vectorial normat real finit dimensional X este compactă dacă şi numai dacă S este închisă şi mărginită în X. Această afirmaţie este o consecinţă a teoremei lui Heine-Borel amintită mai sus şi va fi dovedită mai tîrziu (v.5.13). Deci submulţimile compacte ale lui $\mathbb{R}^n$ sînt submulţimile închise şi mărginite din $\mathbb{R}^n$. De exemplu, sfera unitate S^{n-1} şi discul unitate închis D^n sînt submulţimi compacte ale lui $\mathbb{R}^n$ (v.şi demonstraţia lui 5.12).

3.10. Definiţie. Se zice că un spaţiu topologic X posedă proprietatea intersecţiei finite (pe scurt, p.i.f.) dacă orice familie $\mathcal{F}$ de mulţimi închise din X cu proprietatea (α) are

şi proprietatea (β):

(α) $F_1 \cap \dots \cap F_k \neq \emptyset$ pentru fiecare subfamilie finită $\{F_1,\dots,F_k\} \subset \mathcal{F}$.

(β) $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F \neq \emptyset$.

3.11. Propoziţie. Un spaţiu topologic $(X,\mathcal{T})$ este compact dacă şi numai dacă el are p.i.f.

Demonstraţie. Intre familiile $\mathcal{F}$ de mulţimi închise din X şi familiile $\mathcal{V}$ de mulţimi deschise din X există o corespondenţă bijectivă dată de operaţia de luare a complementarei, adică $\mathcal{V} \leftrightarrow \mathcal{F}$ dacă şi numai dacă $\mathcal{V} = \{F' \mid F \in \mathcal{F}\}$ sau, echivalent, $\mathcal{F} = \{V' \mid V \in \mathcal{V}\}$. Prin urmare, dacă $\mathcal{V}$ corespunde lui $\mathcal{F}$, atunci

$$\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F = \emptyset \iff \bigcup_{V\in\mathcal{V}} V = X,$$

adică $\mathcal{V}$ este o acoperire deschisă pentru X dacă şi numai dacă $\mathcal{F}$ nu satisface proprietatea (β). Similar, $\mathcal{V}$ posedă o subfamilie finită ce acoperă X dacă şi numai dacă $\mathcal{F}$ nu satisface proprietatea (α). Dacă X este compact, atunci $(\overline{\beta})$ implică $(\overline{\alpha})$, adică (α) implică (β). Reciproc, dacă (α) implică (β), atunci $(\overline{\beta})$ implică $(\overline{\alpha})$, adică X este compact.

Q. E. D.

3.12. Propoziţie. Orice submulţime închisă a unui spaţiu topologic compact este compactă în topologia relativă.

Demonstraţie. Fie S o submulţime închisă a spaţiului topologic compact X. Să arătăm că S are p.i.f. Fie $\mathcal{F}$ orice familie de submulţimi închise ale lui S ce satisface proprietatea (α). Deoarece S este închisă şi fiecare $F \in \mathcal{F}$ este închisă în S, fiecare $F \in \mathcal{F}$ este închisă în X (v.2.11). Prin urmare, $\mathcal{F}$ este o familie de submulţimi închise din X ce satisface pro-

prietatea (α). Deoarece X este compact, $\mathcal{F}$ satisface atunci şi proprietatea (β), adică $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F \neq \emptyset$. Dar $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F \subset S$, aşa încît S are p.i.f.

Q. E. D.

3.13. Definiţie. O proprietate referitoare la un spaţiu topologic $(X,\mathcal{T})$ se numeşte ereditară, dacă ea, fiind valabilă pentru $(X,\mathcal{T})$, rămîne adevărată pentru orice subspaţiu topologic $(S,\mathcal{T}_S)$, unde $S \subseteq X$.

Din 2.43 rezultă că proprietatea unui spaţiu topologic de a avea o bază de cardinal mai mic sau egal decît un cardinal dat este ereditară. Proprietatea unui spaţiu topologic de a fi compact nu este în general ereditară (v.şi 3.12) De asemenea, proprietatea unui spaţiu topologic de a fi spaţiu Baire nu este în general ereditară (v.2.29).

3.14. Propoziţie. Orice uniune finită de submulţimi compacte ale unui spaţiu topologic este o submulţime compactă.

Demonstraţie. Fie $K_1,\ldots,K_n$ submulţimi compacte ale spaţiului topologic X. Fie $K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ dotată cu topologia de subspaţiu al lui X şi $\mathcal{V}$ o X-acoperire pentru K. Atunci $\mathcal{V}$ este o X-acoperire pentru fiecare K_i, i=1,...,n. Deoarece K_i este compact, din $\mathcal{V}$ se poate extrage un număr finit N_i de mulţimi de forma V_{k_i} unde $V_{k_i} \in \mathcal{V}$, $k_i=1,\ldots,N_i$, astfel încît $K_i \subseteq \bigcup_{k_i=1}^{N_i} V_{k_i}$ [v.3.8,1)] . Familia formată din mulţimile V_{k_i} ($k_i=1,\ldots,N_i$, i=1,...,n) este atunci o X-acoperire finită pentru K şi este evident o subfamilie a familiei $\mathcal{V}$. Deci K este o submulţime compactă [v.3.8,1)] .

Q. E. D.

Observaţie. In general, intersecţia a două submulţimi com-

pacte ale unui spaţiu topologic nu este o submulţime compactă (pentru un exemplu, v. [9] , p.113). In schimb, din 3.12 rezultă imediat că orice intersecţie de submulţimi închise şi compacte ale unui spaţiu topologic este o submulţime închisă şi compactă.

3.15. Propoziţie. Dacă $(X, \mathcal{T})$ este un spaţiu topologic compact, atunci orice submulţime infinită a lui X are cel puţin un punct de acumulare.

Demonstraţie. Vom arăta că dacă submulţimea S din X nu are puncte de acumulare, atunci ea este finită. Dacă S este o asemenea submulţime a lui X, atunci topologia relativă $\mathcal{T}_S$ pe S este topologia discretă [v.2.5,3)] . In adevăr, fie $s \in S$. Deoarece s nu este punct de acumulare al lui S, există o mulţime deschisă $D_s \subset X$ ce conţine pe s astfel încît $(D_s \setminus \{s\}) \cap S = \emptyset$, adică $D_s \cap S = \{s\}$. Astfel fiecare submulţime de forma $\{s\} \in \mathcal{T}_S$, adică $\mathcal{T}_S$ coincide cu topologia discretă pe S. Pe de altă parte, să observăm că submulţimea S este compactă. In adevăr, deoarece S nu are puncte de acumulare, $S = \bar{S}$ şi deci S este închisă în X. Ţinînd seama de 3.12, rezultă că S este compactă. Dacă notăm $V_s = \{s\}$, $s \in S$, atunci în baza celor stabilite mai sus, $\mathcal{V} = \{V_s\}_{s \in S}$ este o acoperire deschisă pentru $(S, \mathcal{T}_S)$. Deoarece S este compactă, există un număr finit de mulţimi $V_{s_1}, \ldots, V_{s_k} \in \mathcal{V}$ astfel încît $S = \bigcup_{i=1}^{k} V_{s_i}$, ceea ce implică $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$, adică S este finită.

Q. E. D.

3.16. Propoziţie. Fie X, Y spaţii topologice şi $f: X \longrightarrow Y$ o aplicaţie continuă şi surjectivă. Dacă X este compact, atunci şi Y este compact. In particular, dacă f este un homeomorfism, atunci X este compact dacă şi numai dacă Y este compact.

Demonstraţie. Dacă $\mathcal{V}$ este o acoperire deschisă a lui Y, atunci $\{ f^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{V} \}$ este o acoperire deschisă a lui X. Deoarece X este compact, există un număr finit de mulţimi deschise $f^{-1}(V_1),\ldots,f^{-1}(V_k)$ astfel încît $X = \bigcup_{i=1}^{k} f^{-1}(V_i)$. Dar f este surjectivă, aşa încît $f(X) = Y$ şi $f(f^{-1}(V_i))=V_i$, pentru orice $i=1,\ldots,k$ [v.1.29,(7),b)] . Ţinînd seama de 1.29, (1), rezultă atunci $Y = \bigcup_{i=1}^{k} V_i$, adică Y este compact.

Q. E. D.

3.17. Corolar. Dacă X este un spaţiu topologic compact şi R este o relaţie de echivalenţă pe X, atunci spaţiul topologic cît X/R este compact.

In adevăr, proiecţia canonică $q:X \longrightarrow X/R$ este o aplicaţie continuă şi surjectivă (v.2.66).

Exemplu. Spaţiul proiectiv real m=dimensional $P\mathbb{R}^m$ este un spaţiu topologic compact, $m \geqslant 0$. In adevăr, dacă R este relaţia de echivalenţă definită pe S^m la 2.70, atunci spaţiul topologic cît S^m/R este compact [v.3.9,3) şi 3.17] . Dar spaţiile topologice $P\mathbb{R}^m$ şi S^m/R sînt homeomorfe [v.2.73,6)] astfel încît $P\mathbb{R}^m$ este compact (v.3.16).

3.18. Corolar. Fie X,Y spaţii topologice şi $f:X \longrightarrow Y$ o aplicaţie continuă. Dacă X este compact, atunci f(X) este o submulţime compactă a lui Y. In particular, dacă C este o submulţime compactă a lui X, atunci f(C) este o submulţime compactă a lui X.

Demonstraţie. Dacă $f:X \to Y$ este continuă, atunci şi $f:X \longrightarrow f(X)$ este continuă, unde f(X) este înzestrat cu topologia relativă (v.2.58). Prima afirmaţie este atunci o consecinţă imediată a propoziţiei 3.16. In sfîrşit, ultima afirmaţie rezultă atunci din continuitatea restricţiei $f|_C$.

Q. E. D.

Observaţie. Proprietatea unei mulţimi dintr-un spaţiu topologic de a fi compactă este topologică [v.2.72,4)] .

3.19. Corolar. Dacă X este un spaţiu topologic compact şi $f:X \longrightarrow \mathbb{R}$ este o aplicaţie continuă, atunci f îşi atinge maximul şi minimul.

Demonstraţie. In baza lui 3.18, f(X) este o submulţime compactă a lui $\mathbb{R}$, deci f(X) este o mulţime închisă şi mărginită din $\mathbb{R}$ [v.3.9,3)] . Maximul lui f este cea mai mică barieră superioară a lui f(X), aşa încît el este un punct de acumulare pentru f(X), deci aparţine lui f(X), căci f(X) este închisă [v.2.18 şi 2.19,6)] . In mod similar se arată că minimul lui f aparţine lui f(X).

Q. E. D.

3.20. Definiţie . Fie X,Y spaţii topologice. O aplicaţie $f:X \longrightarrow Y$ se numeşte proprie dacă pentru orice submulţime compactă C din Y, $f^{-1}(C)$ este o submulţime compactă C din X (unii autori numesc o asemenea aplicaţie compactă) .

De exemplu, dacă X este un spaţiu topologic, atunci 1_X este o aplicaţie proprie. Mai general, orice homeomorfism între două spaţii topologice este o aplicaţie proprie (v.3.18). Pentru alte exemple, v.5.15.

Observaţie. Dacă P este spaţiul topologic format dintr-un singur punct (în acest caz topologia trivială coincide cu topologia discretă pe P), atunci o aplicaţie $f:X \longrightarrow P$ este proprie dacă şi numai dacă X este compact.

3.21. Propoziţie. Fie X,Y,Z spaţii topologice, $f:X \longrightarrow Y$ şi $g:Y \longrightarrow Z$ aplicaţii.

1) Dacă f şi g sînt aplicaţii proprii, atunci $g \circ f$ este tot o aplicaţie proprie.

2) Dacă $g \circ f$ este o aplicaţie proprie, iar f este

continuă şi surjectivă, atunci g este proprie.

3) Dacă $g \circ f$ este o aplicaţie proprie, iar g este continuă şi injectivă, atunci f este proprie.

Demonstraţie. Demonstraţia lui 1) o propunem drept exerciţiu cititorului. Să dovedim acum 2) Dacă C este o submulţime compactă din Z, atunci $K=(g\circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$ este o submulţime compactă din X. Deoarece f este surjectivă, rezultă că $f(K)=g^{-1}(C)$ [v. 1.29,(7),b)] , de unde - în baza continuităţii lui f urmează că $g^{-1}(C)$ este compactă (v.3.18). In sfîrşit, să dovedim 3) Fie K o submulţime compactă din Y. Din continuitatea lui g urmează atunci că $g(K)$ este o submulţime compactă din Z (v.3.18). Deoarece g este injectivă, $(g\circ f)^{-1}(g(K))=f^{-1}(g^{-1}(g(K)))=f^{-1}(K)$ [v.1.29,(6),b)] ; dar $g\circ f$ este proprie, aşa încît $f^{-1}(K)$ este o submulţime compactă a lui X.

Q. E. D.

3.22. Teoremă . Fie X,Y spaţii topologice. O aplicaţie continuă şi închisă $f:X\longrightarrow Y$ este proprie dacă şi numai dacă pentru orice $y\in Y$, $f^{-1}(\{y\})$ este o submulţime compactă din X.

Demonstraţie. Fie $f:X\longrightarrow Y$ o aplicaţie continuă şi proprie. Deoarece pentru orice $y\in Y$, $\{y\}$ este o submulţime compactă din Y, rezultă că $f^{-1}(\{y\})$ este o submulţime compactă din X.

Reciproc, fie $f:X\longrightarrow Y$ o aplicaţie continuă şi închisă, C o submulţime compactă arbitrară din Y, $K=f^{-1}(C)$. Putem presupune $C\neq\phi$, căci $f^{-1}(\phi)=\phi$ este compactă. Fie $y\in C$ şi $\mathcal{V}$ o X-acoperire deschisă a lui K. Atunci în baza ipotezei, $f^{-1}(\{y\})\subset K$ este compactă şi prin urmare există o X-acoperire finită $\mathcal{V}_y\subset\mathcal{V}$ pentru $f^{-1}(\{y\})$ [v.3.8,1)] .Fie $D_y=\bigcup_{V\in\mathcal{V}_y} V$. Deoarece D_y este deschisă şi f este o aplicaţie închisă, $f(C_X(D_y))$ este o mulţime închisă din Y, aşa încît $U_y=C_Y(f(C_X(D_y)))$ este o mulţime deschisă din Y. Mai mult, să observăm că :

$$f^{-1}(U_y)=f^{-1}(C_Y(f(C_X(D_y))))=C_X(f^{-1}(f(C_X(D_y))))$$

$$\subseteq C_X(C_X(D_y))=D_y, \text{ căci } C_X(D_y)\subseteq f^{-1}(f(C_X(D_y)))$$

[v:1.29,(3)] și demonstrația afirmației din 1.29,(6) . Prin urmare, mulțimea $f^{-1}(U_y)$ este acoperită de familia $\mathcal{V}_y$. Fie $\mathcal{U}=\{U_y \mid y\in C\}$. In baza celor dovedite mai sus, $\mathcal{U}$ este o X-acoperire pentru C cu proprietatea că oricare ar fi $y\in C$, $f^{-1}(U_y)$ este acoperită de o subfamilie finită a lui $\mathcal{V}$. Dar C este compactă, așa încît o subfamilie finită a lui $\mathcal{U}$ acoperă C, să zicem :

$$\{U_{y_1},\dots,U_{y_m} \mid y_i\in C,\ i=1,\dots,m\}.$$

Dar atunci,

$$K\subseteq \bigcup_{i=1}^{m} f^{-1}(U_{y_i})\subseteq \bigcup_{i=1}^{m} D_{y_i}=\bigcup_{i=1}^{m}\Big(\bigcup_{V\in\mathcal{V}_{y_i}} V\Big),$$

adică o subfamilie finită a lui $\mathcal{V}$ acoperă pe K.

Q. E. D.

3.23. Definiție. O submulțime a unui spațiu topologic Y se numește compact închisă dacă intersecția ei cu fiecare submulțime compactă a lui Y este compactă.

De exemplu, orice mulțime închisă din Y este și compact închisă.

3.24. Propoziție. O submulțime F a unui spațiu topologic Y este compact închisă dacă și numai dacă aplicația de incluziune $i:F\subset Y$ este proprie.

In adevăr, aplicația i este proprie dacă și numai dacă pentru orice submulțime compactă C din Y, $i^{-1}(C)=F\cap C$ este o submulțime compactă din Y.

Observație . Dacă $f:X\longrightarrow Y$ este o aplicație proprie și

F este o submulţime compact închisă a lui X, atunci restricţia $f|_F : F \longrightarrow Y$ este o aplicaţie proprie. In adevăr, n-avem decît să observăm că $f|_F = f \circ i$, unde $i : F \subset X$ este aplicaţia de incluziune, şi să ţinem seama de 3.24 şi 3.21,1).

In aplicaţii prezintă adesea interes problema de a şti în ce condiţii o aplicaţie proprie este închisă. In propoziţia ce urmează X şi Z notează spaţii topologice.

3.25. Propoziţie. (G.T. Whyburn) . Următoarele patru proprietăţi ale unui spaţiu topologic Y sînt echivalente:

(a) Orice aplicaţie continuă proprie şi surjectivă $g : Z \longrightarrow Y$ este închisă.

(b) Orice aplicaţie continuă proprie $f : X \longrightarrow Y$ este închisă.

(c) Orice aplicaţie continuă proprie şi injectivă $h : X \longrightarrow Y$ este închisă.

(d) Orice submulţime compact închisă F a lui Y este închisă.

Demonstraţie . Presupunînd (a) adevărată şi dată o aplicaţie continuă proprie $f : X \longrightarrow Y$, fie Z suma (directă) spaţiilor topologice X şi Y (v.2.14) şi definim $g : Z \longrightarrow Y$ prin $g|_X = f$ şi $g|_Y = 1_Y$. Atunci g este surjectivă şi proprie, căci dacă C este o mulţime compactă din Y, atunci $g^{-1}(C) = g^{-1}(C) \cap Z =$ $= (g^{-1}(C) \cap X) \cup (g^{-1}(C) \cap Y) = f^{-1}(C) \cup C$ este compactă în Z (v.3.14). Continuitatea lui g este o consecinţă imediată a lui 2.61. Deci g este închisă şi deoarece X este închisă în Z (v.2.15), f este o aplicaţie închisă (v.2.11 şi exemplul ce precede 2.55). Deci (a) $\Longrightarrow$ (b). In mod trivial, (b) $\Longrightarrow$ (c), în timp ce implicaţia (c) $\Longrightarrow$ (d) este imediată în baza lui 3.24. Deoarece implicaţia (b) $\Longrightarrow$ (a) este trivială, rămîne să dovedim că (d) $\Longrightarrow$ (b). Fie $f : X \longrightarrow Y$ o aplicaţie continuă proprie şi

F este o submulţime compact închisă a lui X, atunci restricţia $f|_F : F \longrightarrow Y$ este o aplicaţie proprie. In adevăr, n-avem decît să observăm că $f|_F = f \circ i$, unde $i : F \subset X$ este aplicaţia de incluziune, şi să ţinem seama de 3.24 şi 3.21,1).

In aplicaţii prezintă adesea interes problema de a şti în ce condiţii o aplicaţie proprie este închisă. In propoziţia ce urmează X şi Z notează spaţii topologice.

3.25. Propoziţie. (G.T. Whyburn) . Următoarele patru proprietăţi ale unui spaţiu topologic Y sînt echivalente:

(a) Orice aplicaţie continuă proprie şi surjectivă $g : Z \longrightarrow Y$ este închisă.

(b) Orice aplicaţie continuă proprie $f : X \longrightarrow Y$ este închisă.

(c) Orice aplicaţie continuă proprie şi injectivă $h : X \longrightarrow Y$ este închisă.

(d) Orice submulţime compact închisă F a lui Y este închisă.

Demonstraţie . Presupunînd (a) adevărată şi dată o aplicaţie continuă proprie $f : X \longrightarrow Y$, fie Z suma (directă) spaţiilor topologice X şi Y (v.2.14) şi definim $g : Z \longrightarrow Y$ prin $g|_X = f$ şi $g|_Y = 1_Y$. Atunci g este surjectivă şi proprie, căci dacă C este o mulţime compactă din Y, atunci $g^{-1}(C) = g^{-1}(C) \cap Z =$ $= (g^{-1}(C) \cap X) \cup (g^{-1}(C) \cap Y) = f^{-1}(C) \cup C$ este compactă în Z (v.3.14). Continuitatea lui g este o consecinţă imediată a lui 2.61. Deci g este închisă şi deoarece X este închisă în Z (v.2.15), f este o aplicaţie închisă (v.2.11 şi exemplul ce precede 2.55). Deci (a) $\Longrightarrow$ (b). In mod trivial, (b) $\Longrightarrow$ (c), în timp ce implicaţia (c) $\Longrightarrow$ (d) este imediată în baza lui 3.24. Deoarece implicaţia (b) $\Longrightarrow$ (a) este trivială, rămîne să dovedim că (d) $\Longrightarrow$ (b). Fie $f : X \longrightarrow Y$ o aplicaţie continuă proprie şi

F o submulţime închisă din spaţiul topologic X. Trebuie să arătăm că $f(F)$ este închisă în Y şi deoarece am presupus (d) adevărată, este suficient să arătăm că $f(F)$ este compact închisă adică dacă K este o submulţime compactă a lui Y, atunci $K \cap f(F)$ este compactă. Dar $K \cap f(F) = f(f^{-1}(K) \cap F)$, egalitate ce se verifică imediat prin dublă incluziune. Deoarece f este proprie, $f^{-1}(K)$ este compactă şi deci submulţimea închisă $f^{-1}(K) \cap F$ a lui $f^{-1}(K)$ va fi de asemenea compactă (v.3.12). Deoarece f este continuă, $f(f^{-1}(K) \cap F)$ va fi compactă (v.3.18).

Q. E. D.

3.26. Observaţie. Din demonstraţia lui 3.25 rezultă că echivalenţa (a) $\Longleftrightarrow$ (b) rămîne adevărată chiar dacă se renunţă la condiţia de continuitate a aplicaţiilor.

3.27. Propoziţie. Fie X,Y spaţii topologice, unde Y satisface condiţia (d) din 3.25, $f:X \longrightarrow Y$ o aplicaţie continuă. Pentru ca f să fie proprie este necesar şi suficient ca proiecţia canonică $q:X \longrightarrow X/R_f$ să fie proprie, $\tilde{f}:X/R_f \longrightarrow f(X)$ să fie homeomorfism şi $f(X)$ să fie o submulţime închisă a lui Y.

Demonstraţie. Ţinînd seama de 3.24 şi 3.21,1), suficienţa condiţiei rezultă imediat din egalitatea $f=i\circ\tilde{f}\circ q$ (v.1.36), unde $i:f(X) \subset Y$ este aplicaţia de incluziune. Reciproc, dacă $\tilde{f}$ este proprie, atunci f este închisă. (v.3.25), aşa încît $f(X)$ este închisă în Y. Pe de altă parte, dacă f este închisă, $\tilde{f}$ este un homeomorfism (v.2.74). Deoarece $f=i\circ\tilde{f}\circ q$ este proprie şi $i:f(X) \subset Y$ este continuă şi injectivă, $\tilde{f}\circ q$ este proprie [v. 3.21,3)] . Prin urmare, $q=(\tilde{f})^{-1}\circ(\tilde{f}\circ q)$ este proprie [v.3.21,1)].

Q. E. D.

Spaţii metrice

Prin definiţia 2.1 am introdus conceptul de spaţiu metric. Vom studia mai departe asemenea spaţii, precizînd modul în care

îşi găsesc aici concretizarea o serie din noţiunile considerate pentru spaţii topologice generale.

Fie (M, ρ) un spaţiu metric. Atunci există pe M o topologie canonică (v.2.37). In toate cele ce urmează, cînd vom vorbi de topologia unui spaţiu metric vom avea în vedere această topologie canonică. Pe baza celor stabilite la 2.36, 2.37 şi 2.5,7), o mulţime $U \subset M$ este deschisă dacă şi numai dacă $U = \emptyset$ sau dacă pentru orice $x \in U$, există o celulă deschisă cu centrul în x conţinută în U. Pe de altă parte, să notăm că orice celulă "închisă" din M(v.2.2) este o mulţime închisă. In adevăr, dacă $x \in \bar{B}(p,r) = \{ m \in M \mid \rho(p,m) \leqslant r \}$, atunci pentru orice $y \in B(x, \rho(p,x)-r)$, $\rho(y,x) < \rho(p,x)-r$. Inegalitatea triunghiulară $\rho(p,x) \leqslant \rho(p,y) + \rho(y,x)$ implică atunci $r < \rho(p,x) - \rho(y,x) \leqslant \rho(p,y)$, de unde rezultă $y \in \bar{B}(p,r)$. Prin urmare, $B(x, \rho(p,x)-r) \subset M \setminus \bar{B}(p,r)$, ceea ce arată că mulţimea $M \setminus \bar{B}(p,r)$ este deschisă.

3.28. Definiţie. Un şir $\{x_n\} \subset M$ se numeşte convergent dacă există $x \in M$ cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr natural N astfel încît

$$\rho(x_n, x) < \varepsilon \quad \text{de îndată ce} \quad n \geqslant N.$$

Este trivial de arătat că dacă un asemenea x există atunci el este unic. x se numeşte limita şirului $\{x_n\}$. Dacă x este limita şirului $\{x_n\}$, atunci vom scrie $x_n \longrightarrow x$ sau $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Acest fapt este echivalent cu $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$.

3.29. Propoziţie. O mulţime nevidă F dintr-un spaţiu metric este închisă dacă şi numai dacă pentru orice şir convergent $\{x_n\} \subset F$, limita sa aparţine de asemenea lui F.

Demonstraţie. Dacă F este închisă, $\{x_n\} \subset F$, $x_n \longrightarrow x$ şi $x \in F$, atunci există $r > 0$ astfel încît $B(x,r) \subset F'$. Acest fapt implică $\rho(x_n, x) \geqslant r$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, ceea ce contrazice

$x_n \longrightarrow x$.

Reciproc, să presupunem condiția din ipoteză satisfăcută și că mulțimea F' nu este deschisă. Atunci trebuie să existe un $x \in F'$ astfel încît $B(x, \frac{1}{n}) \cap F \neq \emptyset$ pentru fiecare număr natural n. Fie $x_n \in F \cap B(x, \frac{1}{n})$. Atunci $\{x_n\} \subset F$ și $\rho(x, x_n) < \frac{1}{n}$ pentru orice $n=1,2,\ldots$, adică $x_n \longrightarrow x$, deci $x \in F$, ceea ce este absurd, căci $x \in F'$.

Q. E. D.

3.30. Observație. Dacă $A \subset M$, atunci închiderea $\bar{A}$ a lui A (v.2.18) constă din limitele tuturor șirurilor convergente din A. In adevăr, să notăm pentru moment cu $\tilde{A}$ mulțimea ce constă din limitele tuturor șirurilor convergente din A. Să observăm că $A \subseteq \tilde{A}$, căci pentru orice $a \in A$, șirul $\{x_n = a\}$ din A este convergent la a, adică $a \in \tilde{A}$. Pe de altă parte, mulțimea $\tilde{A}$ este închisă: dacă $\{x_n\} \subset \tilde{A}$ și $x_n \longrightarrow x$, atunci pentru fiecare n să alegem $y_n \in A$ astfel încît $\rho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$. In acest caz, $y_n \longrightarrow x$, adică $x \in \tilde{A}$ și deci $\tilde{A}$ este închisă (v.3.29). Deoarece $\tilde{A}$ este închisă și $\tilde{A} \supseteq A$ rezultă că $\tilde{A} \supseteq \bar{A}$. In sfîrșit, să observăm că o mulțime A din M este închisă dacă și numai dacă $A = \tilde{A}$ (v.3.29). Prin urmare, dacă F este o mulțime închisă arbitră din M ce conține pe A, atunci $\tilde{A} \subseteq \tilde{F} = F$, de unde rezultă $\tilde{A} \subseteq \bar{A}$ v.2.19,7).

3.31 Propoziție. Fie (M, ρ) un spațiu metric și $A \subset M, A \neq \emptyset$. Considerînd A ca spațiu metric cu metrica $\rho|_{A \times A} : A \times A \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, topologia canonică a lui A coincide cu topologia indusă de topologia canonică a lui M pe A.

Demonstrație. Este suficient să arătăm că o mulțime $F \subset A$ este închisă în raport cu topologia canonică pe A (adică în sensul lui 3.29), dacă și numai dacă există o mulțime închisă $H \subset M$

Astfel încît $B \cap A = F$ (v.2.10). Să presupunem întîi că $F \subset A$ este închisă în A. Atunci închiderea $\bar{F} = \tilde{F}$ în M este închisă și $\bar{F} \cap A = F$. In adevăr, incluziunea $\bar{F} \cap A \supseteq F$ este imediată. Pe de altă parte, dacă ar exista $x \in \bar{F} \cap A$ astfel încît $x \in F$, atunci $x \in \bar{F}$ și $x \in A \setminus F$. In acest caz există șirul $\{x_n\} \subset F$ astfel încît $x_n \longrightarrow x$ și deoarece $A \setminus F$ este deschisă, există $r > 0$ astfel încît $B(x,r) \subseteq A \setminus F$, incluziune ce implică $\rho(x_n, x) \geq r$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, ceea ce contrazice $x_n \longrightarrow x$. Deci $\bar{F} \cap A \subseteq F$, adică $\bar{F} \cap A = F$. Reciproc, dacă $B \subset M$ este închisă, atunci $B \cap A$ este închisă în A în sensul lui 3.29, căci dacă $\{x_n\} \subset B \cap A$ și $x_n \longrightarrow x$ $(x \in A)$, atunci $x \in B$ căci B este închisă. Deci $x \in B \cap A$, adică $B \cap A$ este închisă în A.

Q. E. D.

3.32. Propoziție. Fie (M_1, ρ_1) și (M_2, ρ_2) două spații metrice și $f: M_1 \longrightarrow M_2$ o aplicație. Următoarele patru afirmații sînt echivalente:

(a) Dacă $x_n \longrightarrow x$, atunci $f(x_n) \longrightarrow f(x)$.

(b) Dacă mulțimea F este închisă în M_2, atunci $f^{-1}(F)$ este închisă în M_1.

(c) Dacă mulțimea U este deschisă în M_2, atunci $f^{-1}(U)$ este deschisă în M_1, adică f este continuă în raport cu topologiile canonice ale lui M_1 și M_2.

(d) Pentru fiecare $x \in M_1$ și $\varepsilon > 0$, există $\delta = \delta(x, \varepsilon) > 0$ astfel încît $\rho_1(x,y) < \delta$ să implice $\rho_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Demonstrație. Să dovedim că (a) $\Longrightarrow$ (b). Dacă F este o submulțime închisă a lui M_2 și $\{x_n\}$ este un șir din $f^{-1}(F)$ astfel încît $x_n \longrightarrow x$, atunci $f(x_n) \longrightarrow f(x)$, de unde în baza lui 3.29 rezultă $f(x) \in F$, adică $x \in f^{-1}(F)$. Deci $f^{-1}(F)$ este închisă în M_1 (v.din nou 3.29). Implicația (b) $\Longrightarrow$ (c) a fost deja

dovedită (v.2.5o). Să verificăm acum că (c) $\Longrightarrow$ (d). Dat $x \in M$ şi $\varepsilon > 0$, celula $B_{\rho_2}(f(x), \varepsilon)$ este deschisă aşa încît în baza lui (c), mulţimea $f^{-1}(B_{\rho_2}(f(x), \varepsilon))$ este deschisă şi conţine pe x. Deci există $\delta > 0$ astfel încît $B_{\rho_1}(x, \delta) \subset f^{-1}(B_{\rho_2}(f(x), \varepsilon))$, sau $f(B_{\rho_1}(x, \delta)) \subset B_{\rho_2}(f(x), \varepsilon)$, ceea ce este echivalent cu (d). In sfîrşit, să dovedim că (d) $\Longrightarrow$ (a). Să presupunem că $x_n \longrightarrow x$ şi că şirul $\{f(x_n)\}$ nu converge către $f(x)$. Atunci există un $\varepsilon > 0$ şi un subşir $\{x_{n_i}\} \subset \{x_n\}$ astfel încît $\rho_2(f(x_{n_i}), f(x)) \geq \varepsilon$. Deoarece $\rho_1(x_{n_j}, x) \longrightarrow 0$, ultima inegalitate contrazice (d).

Q. E. D.

3.33. Observaţii. 1) Orice produs cartezian finit $\overset{k}{\underset{i=1}{\times}} M_i$ de spaţii metrice (M_i, ρ_i) este un spaţiu metric. In adevăr, se verifică fără dificultate că aplicaţia $\rho : (\overset{k}{\underset{i=1}{\times}} M_i) \times (\overset{k}{\underset{i=1}{\times}} M_i) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ definită prin $\rho((x_1, \ldots, x_k), (y_1, \ldots, y_k)) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(x_i, y_i)$ determină o metrică pe $\overset{k}{\underset{i=1}{\times}} M_i$.

2) Metrica $\rho : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ este o aplicaţie continuă pe spaţiul metric $M \times M$, deoarece dacă $(x_n, y_n) \longrightarrow (x, y)$ în sensul metricii corespunzătoare pe $M \times M$ atunci $x_n \longrightarrow x$, $y_n \longrightarrow y$ în sensul metricii ρ pe M şi

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x, y)| \leq |\rho(x_n, y_n) - \rho(x_n, y)| + |\rho(x_n, y) - \rho(x, y)| \leq \rho(y_n, y) + \rho(x_n, x) \longrightarrow 0.$$

In adevăr, în orice spaţiu metric (M, ρ) are loc inegalitatea

$$|\rho(x, y) - \rho(x, z)| \leq \rho(y, z)$$

pentru orice $x, y, z, \in M$, căci aplicînd în mod convenabil de două ori inegalitatea triunghiulară obţinem

$\rho(x,y) \leq \rho(x,z)+\rho(y,z)$ și $\rho(x,z) \leq \rho(x,y)+\rho(y,z)$.

3.34. Definiție. Fie (M_1, ρ_1) și (M_2, ρ_2) două spații metrice. O aplicație $f: M_1 \longrightarrow M_2$ astfel încît $\rho_2(f(x),f(y))=\rho_1(x,y)$ pentru orice $x,y \in M_1$ se numește o scufundare izometrică a lui M_1 în M_2.

3.35. Observații. 1) Orice scufundare izometrică este o injecție continuă (v.3.32).

2) Orice scufundare izometrică f este o scufundare topologică, adică $\tilde{f}$ aplică M_1 homeomorf pe $f(M_1)$ (v.2.76).

3.36. Definiție. Fie (M, ρ) un spațiu metric. Un șir $\{x_n\}$ din M se numește Cauchy dacă $\lim_{m,n\to\infty} \rho(x_n,x_m)=0$. Spațiul metric (M, ρ) se numește complet dacă orice șir Cauchy din M este convergent.

3.37. Propoziție. Dacă (M, ρ) este un spațiu metric complet și S este o submulțime închisă nevidă din M, atunci $(S, \rho|_{S\times S})$ este un spațiu metric complet.

Demonstrație. Fie $\{x_n\}$ un șir Cauchy din S. Deoarece M este un spațiu metric complet, șirul $\{x_n\}$ este convergent, deci există $x \in M$ astfel încît $\lim_{n\to\infty} x_n=x$. Deoarece S este închisă, rezultă $x \in S$ (v.3.29), adică $\{x_n\}$ este un șir convergent în S, deci S este complet.

Q. E. D.

3.38. Propoziție. Dacă (M, ρ) este un spațiu metric și $S \subset M$, $S \neq \emptyset$, este astfel încît $(S, \rho|_{S\times S})$ este un spațiu metric complet, atunci S este o submulțime închisă din M.

Demonstrație. Să presupunem prin absurd că S n-ar fi închisă, deci există $x \in \bar{S}$, dar $x \notin S$. In baza observației 3.30, există un șir $\{x_n\}$ în S convergent la x, deci Cauchy. Deoarece limita șirului $\{x_n\}$ este unică, șirul $\{x_n\}$ nu are altă

limită, deci în baza ipotezei el n-ar avea limită în S, adică spaţiul metric $(S, \rho|_{S\times S})$ n-ar fi complet.

Q. E. D.

3.39. Observaţie. Completitudinea nu este o proprietate topologică. De exemplu, aplicaţia $tg:(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$ este un homeomorfism, $\mathbb{R}$ este un spaţiu metric complet (în metrica uzuală), în timp ce $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (cu metrica indusă de $\mathbb{R}$) nu este complet. In adevăr, dacă $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ar fi complet, atunci $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ar trebui să fie o submulţime închisă a lui $\mathbb{R}$ (v.3.38).

In legătură cu spaţiile metrice, se poate dovedi următoarea teoremă de completare: a lui Hausdorff: Pentru orice spaţiu metric (M, ρ), există o scufundare izometrică f a lui M într-un spaţiu metric complet $(\tilde{M}, \tilde{\rho})$ astfel încît $f(M)$ este densă în $\tilde{M}$. Spaţiul metric $(\tilde{M}, \tilde{\rho})$ se numeşte completatul lui (M, ρ).

Demonstraţia acestei afirmaţii poate fi găsită de exemplu în [23].

Exemple importante de spaţii metrice le constituie spaţiile vectoriale normate. Reamintim că un spaţiu vectorial normat (real sau complex) este un spaţiu vectorial (real sau complex) E împreună cu o funcţie real valuată $|\ |$ definită pe E, numită normă astfel încît

SVN 1 $\quad |x| \geq 0, \forall x \in E$ şi $|x| = 0 \iff x = 0$.

SVN 2 $\quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ (sau $\mathbb{C}$) şi $\forall x \in E, |\alpha x| = |\alpha|\,|x|$.

SVN 3 $\quad \forall x, y \in E, |x+y| \leq |x| + |y|$.

Vom considera acum un exemplu important de spaţiu vectorial normat. Fie S o mulţime nevidă şi F un spaţiu vectorial normat. O aplicaţie $f:S \longrightarrow F$ se numeşte mărginită dacă există un

număr real $C > 0$ astfel încît $|f(x)| \leqslant C$ pentru orice $x \in S$. Dacă f este o asemenea aplicaţie mărginită, să definim

$$\| f \|_\infty = \sup_{x \in S} |f(x)| .$$

Mulţimea $\mathcal{B}(S;F)$ a aplicaţiilor mărginite de la S în F este un spaţiu vectorial şi $\| \ \|_\infty$ este o normă pe acest spaţiu numită norma sup. Prin urmare, în raport cu norma sup, $\mathcal{B}(S;F)$ este un spaţiu vectorial normat (chiar un spaţiu Banach). In mod similar, dacă S este un spaţiu topologic mulţimea $\mathcal{BC}(S;F)$ a aplicaţiilor continue mărginite de la S în F este tot un spaţiu vectorial normat (chiar spaţiu Banach) în raport cu norma sup

Orice spaţiu vectorial normat E este un spaţiu metric, căci putem defini aplicaţia $\varrho : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, prin $\varrho(x,y) = |y-x|$. Se verifică imediat că aplicaţia ϱ satisface condiţiile (1)-(3) din definiţia 2.1 a unei metrici. Reciproc, vom arăta imediat că orice spaţiu metric cu metrica mărginită poate fi scufundat izometric într-un spaţiu vectorial normat real.

3.40. Definiţie. Fie (M, ϱ) un spaţiu metric. Se zice că metrica $\varrho : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ este mărginită dacă există $C > 0$ astfel încît $\varrho(x,y) < C$ pentru orice $x,y \in M$.

3.41. Teorema lui Kuratowski. Dacă (M, ϱ) este un spaţiu cu metrica mărginită ϱ, atunci M poate fi scufundat izometric într-un spaţiu vectorial normat (chiar spaţiu Banach). In particular, dacă M este complet în raport cu metrica ϱ, atunci M poate fi scufundat izometric ca o submulţime închisă într-un spaţiu Banach.

Demonstraţie. Fie $\mathcal{BC}(M, \mathbb{R})$ spaţiul Banach al aplicaţiilor continue mărginite de la M în $\mathbb{R}$ cu norma sup. Dat $x \in M$, fie $f_x \in \mathcal{BC}(M; \mathbb{R})$ aplicaţia definită prin $f_x(m) = \varrho(m,x)$. Să demonstrăm că aplicaţia $F : M \longrightarrow \mathcal{BC}(M, \mathbb{R})$, $F(x) = f_x$, este o scufundare izometrică. Fie $x,y \in M$. Atunci ţinînd seama de ine-

galitatea stabilită la 3.33,2), obţinem :

$$\varrho(x,y) \geq |\varrho(x,m)-\varrho(y,m)| \geq |f_x(m)-f_y(m)| = |(f_x-f_y)(m)|,$$

de unde rezultă

$$\varrho(x,y) \geq \sup_{m\in M} |(f_x-f_y)(m)| = \|f_x-f_y\|_\infty = \|F(x)-F(y)\|_\infty$$

Pe de altă parte,

$$\|F(x)-F(y)\|_\infty = \|f_x-f_y\|_\infty = \sup_{m\in M} |(f_x-f_y)(m)| =$$

$$= \sup_{m\in M} |f_x(m)-f_y(m)| = \sup_{m\in M} |\varrho(x,m) - \varrho(y,m)| \geq$$

$$\geq |\varrho(x,y)-\varrho(y,y)| = \varrho(x,y),$$

adică $\varrho(x,y) = \|F(x) - F(y)\|_\infty$.

Q. E. D.

3.42. Observaţii. 1) Fie (M, ϱ) un spaţiu metric. Atunci aplicaţia $\varrho' : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ definită prin

$$\varrho'(x,y) = \frac{\varrho(x,y)}{1+\varrho(x,y)} \quad , \quad x,y \in M,$$

este o metrică mărginită pe M care induce aceeaşi topologie ca şi ϱ pe M.

In adevăr, $\varrho'(x,y)=0 \iff \varrho(x,y)=0 \iff x=y$. Pe de altă parte, $\varrho(x,y)=\varrho(y,x)$ implică $\varrho'(x,y)=\varrho'(y,x)$. In sfîrşit, dacă a,b,c sînt trei numere reale nenegative astfel încît $a \leq b+c$, atunci $a(1+b)(1+c) \leq b(1+a)(1+c)+c(1+a)(1+b)$. Prin urmare, ϱ' satisface condiţiile (1)-(3) din definiţia 2.1, deci este o metrică pe M. Se observă imediat că $\varrho'(x,y) < 1$, pentru orice $x,y \in M$, adică metrica ϱ' este mărginită. Deoarece aplicaţia $t \longmapsto \frac{t}{1+|t|}$ defineşte un homeomorfism al lui $\mathbb{R}$ pe $(-1,1)$ ce aplică mulţimea $\mathbb{R}_{\geq 0}$ homeomorf pe $[0,1)$, rezultă că cele două metrici ϱ şi ϱ' definesc aceleaşi celule

deschise, anume $B_{\rho'}(x, r/4r)=B_{\rho}(x,r)$, oricare ar fi $x\in M$ şi oricare ar fi $r>0$, adică ρ şi ρ' defineso aceeaşi bază pentru o topologie pe M.

2) In esenţă, observaţia precedentă şi teorema lui Kuratowski arată că orice spaţiu metric poate fi conceput ca o submulţime a unui spaţiu vectorial normat (chiar spaţiu Banach). Teoremele fundamentale relativ la submulţimi din spaţii vectoriale normate se transpun imediat pentru spaţii metrice. De fapt, majoritatea spaţiilor metrice ce apar în mod natural sînt date ca submulţimi în spaţii vectoriale normate. Din acest motiv, pretenţia de a opera cu spaţii metrice abstracte este relativ iluzorie.

3.43. Definiţie. Un spaţiu topologic $(X,\mathcal{T})$ se numeşte metrizabil, dacă există o metrică $\rho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ astfel încît topologia canonică generată de ρ să coincidă cu $\mathcal{T}$.

Observaţie. Proprietatea unui spaţiu topologic de a fi metrizabil este ereditară (v.3.13 şi 3.31).

Vom stabili mai departe cîteva proprietăţi fundamentale ale unor clase speciale de spaţii metrice.

3.44. Propoziţie. Un spaţiu metric este separabil (v.2.22) dacă şi numai dacă există o bază pentru topologia canonică a spaţiului metric formată dintr-o familie finită sau numărabilă de celule deschise.

Demonstraţie. Dacă există o bază finită sau numărabilă, formată din celule deschise, pentru topologia canonică a spaţiului metric, atunci aceasta este separabil (v.2.45).

Reciproc, fie M un spaţiu metric separabil, A o mulţime finită sau numărabilă, densă în M şi

$$\mathcal{B} = \{ B(a,r) \mid a\in A,\ r\geq 0 \text{ şi } r\in\mathbb{Q} \}.$$

Atunci $\mathcal{B}$ este o familie numărabilă de celule deschise. Dacă $U\subset M$ este deschisă, atunci pentru $x\in U$, există $r_0 > 0$ astfel

deschise, anume $B_{\rho'}(x, r/4r) = B_{\rho}(x,r)$, oricare ar fi $x \in M$ şi oricare ar fi $r > 0$, adică ρ şi ρ' definesc aceeaşi bază pentru o topologie pe M.

2) In esenţă, observaţia precedentă şi teorema lui Kuratowski arată că orice spaţiu metric poate fi conceput ca o submulţime a unui spaţiu vectorial normat (chiar spaţiu Banach). Teoremele fundamentale relativ la submulţimi din spaţii vectoriale normate se transpun imediat pentru spaţii metrice. De fapt, majoritatea spaţiilor metrice ce apar în mod natural sînt date ca submulţimi în spaţii vectoriale normate. Din acest motiv, pretenţia de a opera cu spaţii metrice abstracte este ralativ iluzorie.

3.43. Definiţie. Un spaţiu topologic $(X, \mathcal{T})$ se numeşte metrizabil, dacă există o metrică $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ astfel încît topologia canonică generată de ρ să coincidă cu $\mathcal{T}$.

Observaţie. Proprietatea unui spaţiu topologic de a fi metrizabil este ereditară (v.3.13 şi 3.31).

Vom stabili mai departe cîteva proprietăţi fundamentale ale unor clase speciale de spaţii metrice.

3.44. Propoziţie. Un spaţiu metric este separabil (v.2.22) dacă şi numai dacă există o bază pentru topologia canonică a spaţiului metric formată dintr-o familie finită sau numărabilă de celule deschise.

Demonstraţie. Dacă există o bază finită sau numărabilă, formată din celule deschise, pentru topologia canonică a spaţiului metric, atunci aceasta este separabil (v.2.45).

Reciproc, fie M un spaţiu metric separabil, A o mulţime finită sau numărabilă, densă în M şi

$$\mathcal{B} = \{ B(a,r) \mid a \in A, \ r \geq 0 \ \text{ şi } \ r \in \mathbb{Q} \}.$$

Atunci $\mathcal{B}$ este o familie numărabilă de celule deschise. Dacă $U \subset M$ este deschisă, atunci pentru $x \in U$, există $r_0 > 0$ astfel

încît $B(x,r_0) \subset U$. Să alegem $a \in A$ şi $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$, astfel încît $\varrho(x,a) < r < r_0/2$. Atunci $B(a,r) \in \mathcal{B}$ şi $x \in B(a,r) \subset U$, căci pentru orice $y \in B(a,r)$, $\varrho(x,y) \leq \varrho(x,a) + \varrho(a,y) < r+r = 2r < r_0$ aşa încît U este o unitate de celule deschise din familia $\mathcal{B}$ [v.şi 2.5,7)] . Deci $\mathcal{B}$ este o bază numărabilă pentru topologia canonică a lui M [v.2.35,4)] .

Q. E. D.

De exemplu, deoarece spaţiul metric $\mathbb{R}^n$ este separabil (v.2.22), există o bază pentru topologia canonică a lui $\mathbb{R}^n$ formată dintr-o familie numărabilă de celule deschise.

Ţinînd seama de propoziţiile 3.6 şi 3.44 rezultă imediat următorul corolar.

3.45. Corolar. Orice acoperire deschisă a unui spaţiu metric separabil conţine o acoperire finită sau numărabilă a acestuia.

3.46. Propoziţie. Orice mulţime compactă dintr-un spaţiu metric este închisă şi separabilă. In particular, orice spaţiu metric compact este separabil.

Demonstraţie. Fie C o mulţime compactă din spaţiul metric M şi să presupunem, prin absurd, că C n-ar fi închisă. Atunci în baza lui 3.29 trebuie să existe un şir $\{x_n\} \subset C$ astfel încît $x_n \longrightarrow x$ şi $x \overline{\in} C$. Să observăm că pentru fiecare număr natural $k > 0$, mulţimea $\{x_k, x_{k+1}, \ldots, x\}$ este închisă, aşa încît complementara sa, notată cu U_k , este deschisă şi $C \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$. In adevăr, dacă $y \in C$, atunci sau există un număr natural $k_0 \geq 1$ astfel încît $y = x_{k_0}$ sau $y \neq x_k$ pentru orice k număr natural. In primul caz $y \in U_{k_0+1}$, adică $y \in \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$, iar în celălalt caz, $y \in U_k$ pentru orice k număr natural. Pe de altă parte, pentru fiecare număr natural k, $x_k \overline{\in} \bigcup_{n=1}^{k} U_n$, deci $\{U_n\}$ nu conţine o acoperire finită a lui C, ceea ce este imposibil. Deci C

este închisă. Pentru o altă demonstraţie a faptului că orice mulţime compactă dintr-un spaţiu metric este închisă, v.5.10 şi 5.11.

Să arătăm acum că C este separabilă. In acest scop, fie $k \geq 1$ un număr natural fixat şi să considerăm M-acoperirea deschisă $\left\{ B(x,\frac{1}{k}) \mid x \in C \right\}$ pentru C. Deoarece C este compactă, există puncte $x^k_1,\ldots,x^k_{n(k)} \in C$ astfel încît $C \subset \bigcup_{i=1}^{n(k)} B(x^k_i, \frac{1}{k})$. Fie $\left\{ y_1,\ldots,y_n,\ldots \right\} = \left\{ x^k_i \mid i=1,\ldots,n(k),\ k=1,2,\ldots \right\}$. Atunci pentru orice $x \in C$ şi orice număr natural $\ell \geq 1$, există y_{n_ℓ} astfel încît $\rho(y_{n_\ell}, x) < \frac{1}{\ell}$. Deci $y_{n_\ell} \longrightarrow x$ pentru $\ell \longrightarrow \infty$, de unde rezultă că $\overline{\left\{ y_1,\ldots,y_n,\ldots \right\}} \supset C$ (v.3.30). Pe de altă parte, $\left\{ y_1,\ldots,y_n,\ldots \right\} \subset C$, aşa încît $\overline{\left\{ y_1,\ldots,y_n,\ldots \right\}} \subset \overline{C}=C$, căci C este închisă. Prin urmare, mulţimea finită sau numărabilă $\left\{ y_1,\ldots,y_n,\ldots \right\}$ este densă în C, adică C este separabilă.

Q. E. D.

Fie (M, ρ) un spaţiu metric. Se poate arăta că următoarele patru condiţii pentru M sînt echivalente:

(1) M este compact (proprietatea Heine-Borel) ;

(2) M este numărabil compact , adică orice submulţime infinită a lui M are cel puţin un punct de acumulare (proprietatea Bolzano-Weierstrass);

(3) M este compact prin şiruri, adică orice şir din M are un subşir convergent;

(4) M este complet şi total mărginit, adică pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr finit de celule deschise de rază ε ce acoperă M.

Demonstraţia acestei afirmaţii poate fi găsită de exemplu în [31] (vezi de asemenea şi [8] pp.142-146, pentru demonstraţia echivalenţelor $(1) \Longleftrightarrow (2) \Longleftrightarrow (3)$).

Vom demonstra în continuare o teoremă importantă a lui R. Baire referitor la spaţii metrice complete. Această teoremă are numeroase aplicaţii în matematică.

3.47. Teoremă. (R.Baire) Fie (M, ρ) un spaţiu metric complet, $\{U_n\}$ o familie numărabilă de mulţimi deschise din M astfel încît $\overline{U}_n = M$ pentru $n=1,2,\ldots$ Atunci $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ este dens în M, adică orice r ;idual din M (v.2.25) este dens în M. Cu alte cuvinte orice spaţiu metric complet este un spaţiu Baire (v.2.28).

Demonstraţie. Trebuie să dovedim următoarea afirmaţie: oricare ar fi o mulţime deschisă nevidă D din M, are loc relaţia $D \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n) \neq \emptyset$ (v.observaţia 2.21). Pentru aceasta este suficient să verificăm că oricare ar fi celula deschisă $B(x,r)$ $(r > 0)$, $x \in M$, $B(x,r) \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n) \neq \emptyset$. Fie $x=x_1$ şi $r=r_1$. Deoarece $x_1 \in M = \overline{U}_1$, mulţimea deschisă $B(x_1,r_1) \cap U_1$ este nevidă. Alegem $x_2 \in B(x_1,r_1) \cap U_1$ şi r_2, $0 < r_2 < r_1/2$, astfel încît $\overline{B(x_2,r_2)} \subset B(x_1,r_1) \cap U_1$, unde $\overline{B(x_2,r_2)}$ notează închiderea celulei deschise $B(x_2,r_2)$. Continuînd prin inducţie vom obţine un şir $\{x_n\}$ de puncte din M şi în jurul fiecărui x_n, o celulă deschisă $B(x_n, r_n)$, astfel încît $0 < r_{n+1} < \frac{r_1}{2^n}$ şi $\overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subset B(x_n, r_n) \cap U_n$. $\{x_n\}$ este un şir Cauchy. In adevăr, dat $\varepsilon > 0$, putem alege numărul natural N astfel încît $r_N < \frac{\varepsilon}{2}$. Deoarece $x_n \in B(x_n,r_n) \subseteq$ $\subseteq B(x_N, r_N)$ pentru orice $n \geq N$, $\rho(x_m, x_n) \leq \rho(x_m,x_N) +$ $+ \rho(x_N, x_n) < r_N + r_N < \varepsilon$ pentru orice $m,n \geq N$. M fiind un spaţiu metric complet, şirul $\{x_n\}$ converge către un punct $x_0 \in M$. Să arătăm că $x_0 \in \overline{B(x_n,r_n)}$ pentru orice $n=1,2,\ldots$ Dar pentru orice $n=1,2,\ldots, x_{n+k} \in B(x_n,r_n)$, pentru orice $k \geq 0$. Deoarece $x_0 = \lim_{k\to\infty} x_{n+k}$, $x_0 \in \overline{B(x_n,r_n)}$. Deci $\bigcap_{n=1}^{\infty} B(x_n,r_n) \neq \emptyset$.

In baza construcţiei de mai sus putem scrie:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B(x_n,r_n)} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} [B(x_n,r_n) \cap U_n] \subset B(x_1,r_1) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n\right) =$$

$$= B(x,r) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n\right),$$

ceea ce implică $B(x,r) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n\right) \neq \emptyset$.

Q. E. D.

3.48. Corolar. Dacă (M, ϱ) este un spaţiu metric complet, atunci orice rezidual din M este nevid.

In adevăr, dacă R este un rezidual din M şi $R = \emptyset$, atunci $\bar{R} = \emptyset \neq M$, ceea ce contrazice 3.47.

3.49. Corolar. (teorema de categorie a lui R.Baire).

Un spaţiu metric complet M este de categoria a doua (v. 2.25), adică M nu se poate scrie ca o uniune numărabilă de mulţimi rare.

Demonstraţie. Fie (M, ϱ) un spaţiu metric complet. Să presupunem că $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, unde fiecare A_n este rară (v.2.23). Deoarece $A_n \subseteq \bar{A}_n$, rezultă $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n$, aşa încît $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n$. Luînd complementara, obţinem $\emptyset = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\bar{A}_n)'$. Dar fiecare $(\bar{A}_n)'$ este deschisă şi densă în M [v.2.24,3)] , astfel încît ultima egalitate contrazice 3.48.

Q. E. D.

Vom considera acum două aplicaţii interesante ale teoremei de categorie a lui Baire (v.3.49).

3.50. Teoremă. (principiul uniformei mărginiri). Fie M un spaţiu metric complet, $\mathcal{F}$ o familie de funcţii continue pe M cu valori reale cu proprietatea că pentru fiecare $x \in M$, există o constantă pozitivă C_x astfel încît $|f(x)| \leqslant C_x$ pentru orice $f \in \mathcal{F}$. Atunci există o mulţime deschisă nevidă $U \subset M$ şi o

constantă pozitivă C astfel încît $|f(x)| \leqslant C$ pentru orice $f \in \mathcal{F}$ şi orice $x \in U$.

Demonstraţie. Pentru fiecare $f \in \mathcal{F}$ şi fiecare număr natural $n \geqslant 1$, fie $T_{n,f} = \{ x \in M \mid |f(x)| \leqslant n \}$. Mulţimea $T_{n,f}$ este închisă în M, căci $T_{n,f} = f^{-1}([-n,n])$. Fie $T_n = \bigcap_{f \in \mathcal{F}} T_{n,f} = \{ x \in M \mid |f(x)| \leqslant n, \forall f \in \mathcal{F} \}$. Deoarece T_n este o intersecţie de mulţimi închise, T_n va fi închisă în M. Pe de altă parte, $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n = M$, căci dacă $x \in M$, atunci $x \in T_n$ pentru orice $n > C_x$. In baza lui 3.49, nu toate mulţimile de tip T_n pot fi rare, adică există un număr natural n_0 astfel încît $T_{n_0} = \bar{T}_{n_0}$ va conţine o mulţime deschisă nevidă U. In acest caz pentru orice $x \in U \subseteq T_{n_0}$ şi orice $f \in \mathcal{F}$, $|f(x)| \leqslant n_0$. Il avem atunci decît să luăm $C = n_0$.

Q. E. D.

Din analiza clasică se ştie că există exemple de funcţii $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ce sînt continue pe $\mathbb{R}$, dar care nu sînt derivabile în nici un punct de pe $\mathbb{R}$ **). In acest sens este binecunoscut exemplul lui B.Riemann (1861), în care f este definită prin $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$, precum şi cel al lui K.Weierstrass (1872),

---

**) In legătură cu această chestiune este interesant de semnalat că la începutul secolului al XIX-lea, mulţi matematicieni credeau că o funcţie continuă este diferenţiabilă cu excepţia cîtorva puncte singulare izolate. Ampère a încercat chiar să demonstreze această afirmaţie într-un articol din 1806. Insuşi Cauchy, care a dat definiţii clare pentru continuitate şi derivabilitate, a presupus adesea în demonstraţiile sale că funcţiile continue sînt diferenţiabile, v. [22].

în care f este dată prin $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n x \pi)$, unde a este un întreg impar, $0 < b < 1$ şi $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$. Utilizînd teorema de categorie a lui Baire, vom indica modul în care putem dovedi existenţa unor asemenea tipuri de funcţii. Această metodă este frecvent utilizată în analiză şi topologie pentru a dovedi existenţa unor funcţii cu proprietăţi specificate.

Fie $E = C([0,1]; \mathbb{R})$ spaţiul vectorial real al funcţiilor continue (şi deci mărginite) pe $[0,1]$ cu valori reale. In raport cu norma sup, E este un spaţiu Banach, deci în particular un spaţiu metric complet.

3.51. Propoziţie. Există o funcţie continuă cu valori reale $f \in E = C([0,1]; \mathbb{R})$ astfel încît f nu are derivată în nici un punct din intervalul $[0,1]$.

In adevăr, pentru orice număr natural $n \geqslant 1$, fie:

$$A_n = \left\{ f \in E \;\middle|\; \left| \frac{f(t+h)-f(t)}{h} \right| \leqslant n \text{ pentru un } t \in [0,1] \text{ şi orice } h \text{ cu proprietatea } t+h \in [0,1] \right\}.$$

Se poate arăta că pentru orice n, mulţimea A_n este rară (pentru detalii, v. [31]). Deoarece E este un spaţiu de categoria a doua (v.3.49), rezultă că

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \neq E,$$

adică există o funcţie $f \in E$ astfel încît $f \overline{\in} A_n$ pentru orice n. Acest f este funcţia căutată, deoarece $f \overline{\in} A_n$ este echivalent cu

$$\left| \frac{f(t+h)-f(t)}{h} \right| > n$$

pentru orice $t \in [0,1]$ şi un h (ce depinde de t şi n). Să observăm că pentru fiecare t fixat, $h \longrightarrow 0$ cînd $n \longrightarrow \infty$, deoarece dat $\varepsilon > 0$ expresia $\left| \frac{f(t+h)-f(t)}{h} \right|$ este mărginită

ca funcţie de h pentru $|h| \geq \varepsilon$. Prin urmare,

$\overline{\lim_{h \to 0}} \left| \frac{f(t+h)-f(t)}{h} \right| = \infty$, şi derivata lui f în t nu există în nici un punct $t \in [0,1]$.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL IV

PRODUSE TOPOLOGICE DE SPAŢII TOPOLOGICE

Definiţia structurii topologice produs. Proprietăţi ale topologiei produs.

4.1. Definiţie. Fie $\{(X_t, \mathcal{T}_t)\}_{t\in T}$ o familie arbitrară de spaţii topologice, $\prod_{t\in T} X_t$ produsul cartezian generalizat al familiei de mulţimi $\{X_t\}_{t\in T}$ (v.1.38) şi $p_{t_0} : \prod_{t\in T} X_t \to X_{t_0}$ proiecţia canonică definită, pentru fiecare $t_0 \in T$, prin $p_{t_0}(f) = f(t_0)$, unde $f \in \prod_{t\in T} X_t$. Topologia produs a familiei de topologii $\{\mathcal{T}_t\}_{t\in T}$ este cea mai puţin fină topologie pe $\prod_{t\in T} X_t$ astfel încît fiecare proiecţie canonică p_t să fie continuă. Existenţa acestei topologii este asigurată de propoziţia 2.64. Topologia produs a familiei $\{\mathcal{T}_t\}_{t\in T}$ se notează cu $\prod_{t\in T} \mathcal{T}_t$, iar spaţiul topologic $(\prod_{t\in T} X_t, \prod_{t\in T} \mathcal{T}_t)$ se numeşte produsul topologic al familiei de spaţii topologice $\{(X_t, \mathcal{T}_t)\}_{t\in T}$.

4.2. Observaţii. 1) Ţinînd seama de observaţia 2.65, o bază pentru topologia produs este dată de următoarea familie:

$$\mathcal{B} = \Big\{ \bigcap_{t\in T_1} p_t^{-1}(D_t) \mid T_1 \text{ este o submulţime finită a lui } T, \; D_t \in \mathcal{T}_t \text{ pentru fiecare } t \in T_1 \Big\}.$$

Să analizăm puţin mai amănunţit aceste mulţimi deschise ale bazei $\mathcal{B}$. Pentru fiecare $t_0 \in T$ şi fiecare mulţime deschisă $D_{t_0} \subset X_{t_0}$, $p_{t_0}^{-1}(D_{t_0})$ este "cilindrul plin" $\prod_{t\in T} U_t$, unde

$$U_t = \begin{cases} X_t & \text{dacă } t \neq t_0, \\ D_{t_0} & \text{dacă } t = t_0. \end{cases}$$

In adevăr, $f \in p_{t_o}^{-1}(D_{t_o}) \iff p_{t_o}(f) \in D_{t_o} \iff f(t_o) \in D_{t_o}$

$\iff f(t) \in U_t$ pentru fiecare $t \in T \iff f \in \prod_{t \in T} U_t$.

Luînd intersecţii finite rezultă că

$$\bigcap_{t \in T_1} p_t^{-1}(D_t) = \prod_{t \in T} Q_t ,$$

unde

$$Q_t = \begin{cases} X_t & \text{dacă } t \notin T_1 , \\ D_t & \text{dacă } t \in T_1 . \end{cases}$$

In adevăr, $f \in \bigcap_{t \in T_1} p_t^{-1}(D_t) \iff f \in p_t^{-1}(D_t)$ pentru orice $t \in T_1 \iff p_t(f) = f(t) \in D_t$ pentru orice $t \in T_1 \iff f(t) \in Q_t$ pentru orice $t \in T \iff f \in \prod_{t \in T} Q_t$.

Prin urmare, baza $\mathcal{B}$ pentru topologia produs constă din produse carteziene generalizate de mulţimi deschise ale factorilor, toate aceste mulţimi deschise, cu excepţia unui număr finit care sînt submulţimi deschise proprii ale factorilor coincizînd cu spaţiile topologice factor corespunzătoare.

2) Să presupunem că T este o mulţime infinită şi să presupunem că pentru fiecare $t \in T$, Q_t este o mulţime deschisă nevidă din spaţiul topologic X_t. Atunci luînd în considerare definiţia topologiei produs, dacă $Q_t \neq X_t$ pentru un număr infinit de indici $t \in T$, $\prod_{t \in T} Q_t$ nu este o mulţime a bazei pentru topologia produs pe $\prod_{t \in T} X_t$. Cu alte cuvinte, produsele de infinit de multe submulţimi deschise proprii ale factorilor nu sînt permise ca mulţimi ale bazei pentru topologia produs.

In ceea ce priveşte mulţimile închise, dacă F_t este o mulţime închisă din X_t pentru orice $t \in T$, atunci $\prod_{t \in T} F_t$ este închisă în $\prod_{t \in T} X_t$. Mai general, dacă pentru orice $t \in T$,

A_t este o submulţime din X_t, atunci

$$\overline{\prod_{t\in T} A_t} = \prod_{t\in T} \bar{A}_t .$$

In adevăr, fie $X = \prod_{t\in T} X_t$, $A=\prod_{t\in T} A_t$ şi $x\in C_X(\bar{A})$. Atunci există o mulţime deschisă D în X astfel încît $x\in D$ şi $D\cap A = \emptyset$. Ţinînd seama de definiţia topologiei produs, D este o uniune de mulţimi din baza $\mathcal{B}$ a topologiei produs, deci există $Q=\prod_{t\in T} Q_t \in \mathcal{B}$ astfel încît $x\in Q$ şi $Q\cap A= \emptyset$. Atunci pentru cel puţin un indice $t_0\in T$, $Q_{t_0} \cap A_{t_0} = \emptyset$. Deoarece $x(t_0)=p_{t_0}(x) \in Q_{t_0}$ şi Q_{t_0} este deschisă în X_{t_0}, rezultă că $x(t_0)=p_{t_0}(x) \in \bar{A}_{t_0}$ şi deci $x \in \prod_{t\in T} A_t$, adică $x\in C_X(\prod_{t\in T} \bar{A}_t)$. Deci $C_X(\bar{A}) \subseteq C_X(\prod_{t\in T} \bar{A}_t)$, adică $\prod_{t\in T} \bar{A}_t \subseteq \bar{A}$. Reciproc, fie $x\in C_X(\prod_{t\in T} \bar{A}_t)$. Atunci $x \notin \prod_{t\in T} \bar{A}_t$, aşa încît pentru cel puţin un indice $t_0\in T$, $x(t_0)=p_{t_0}(x) \notin \bar{A}_{t_0}$. Prin urmare, există o mulţime deschisă Q_{t_0} în X_{t_0} astfel încît $x(t_0)\in Q_{t_0}$ şi $Q_{t_0} \cap A_{t_0} = \emptyset$. Pentru $t \neq t_0$, să definim $Q_t=X_t$. Atunci în baza definiţiei topologiei produs, $Q=\prod_{t\in T} Q_t$ este o mulţime deschisă din X astfel încît $x\in Q$ şi $Q\cap A= \emptyset$. Deci $x\notin \bar{A}$, adică $x\in C_X(\bar{A})$, ceea ce implică $C_X(\prod_{t\in T} \bar{A}_t) \subseteq C_X(\bar{A})$ sau $\bar{A} \subseteq \prod_{t\in T} \bar{A}_t$.

3) In baza definiţiei topologiei produs, pentru orice $t_0\in T$, proiecţia canonică $p_{t_0} : \prod_{t\in T} X_t \longrightarrow X_{t_0}$ este continuă. Dacă $Q=\prod_{t\in T} Q_t$ este o mulţime nevidă a bazei $\mathcal{B}$ pentru topologia produs, atunci $p_{t_0}(Q) = Q_{t_0}$ este o mulţime deschisă din X_{t_0}, aşa încît în baza propoziţiei 2.55, p_{t_0} este o aplicaţie deschisă.

4) In general, proiecţiile canonice nu sînt aplicaţii închise. De exemplu, să considerăm $T=\{1,2\}$, $X_1=X_2=\mathbb{R}$ şi proiecţia canonică $p_1: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $p_1(x_1,x_2)=x_1$. Atunci p_1 nu este o aplicaţie închisă. In adevăr, mulţimea $F=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid x_1,x_2=1\}$

este închisă în $\mathbb{R}^2$, căci $F=f^{-1}(\{1\})$, unde $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1,x_2)=x_1 \cdot x_2$, este continuă [v.2.49,6),(b)], iar $\{1\}$ este o submulţime închisă în $\mathbb{R}$, deoarece $\{1\}' = (-\infty,1) \cup (1,+\infty)$ este deschisă în $\mathbb{R}$; dar $p_1(F) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nu este închisă în $\mathbb{R}$.

5) Dacă $X_t \neq \emptyset$ oricare ar fi $t \in T \setminus \{t_0\}$, atunci proiecţia canonică $p_{t_0} : \prod_{t \in T} X_t \to X_{t_0}$ este o proiecţie topologică (v. 2.79). In adevăr, această afirmaţie este o consecinţă imediată a faptului că p_{t_0} este o aplicaţie deschisă [(v.observaţia 3) de mai sus] şi a propoziţiei 2.74 (v.şi exemplul ce succede definiţiei 2.79).

6) Fie $f \in \prod_{t \in T} X_t$ un element fixat, $t_0 \in T$ un indice fixat şi $A_{f,t_0} = \left\{ g \in \prod_{t \in T} X_t \mid g(t) = f(t) \text{ pentru orice } t \in T \setminus \{t_0\} \right\}$ cu topologia indusă de topologia produs. Aplicaţia $\varphi_{t_0} : X_{t_0} \to A_{f,t_0}$, definită prin

$$[\varphi_{t_0}(x)](t) = \begin{cases} f(t) & \text{pentru } t \in T \setminus \{t_0\}, \\ x & \text{pentru } t = t_0 \end{cases}$$

unde $x \in X_{t_0}$, este o bijecţie: aplicaţia inversă a lui φ_{t_0} este restricţia $p_{t_0} \mid A_{f,t_0}$. In adevăr, pentru orice

$x \in X_{t_0}$, $(p_{t_0} \mid A_{f,t_0}) \circ \varphi_{t_0})(x) = p_{t_0}(\varphi_{t_0}(x)) = [\varphi_{t_0}(x)](t_0) = x$,

şi oricare ar fi $g \in A_{f,t_0}$, oricare ar fi $t \in T$, $[(\varphi_{t_0} \circ p_{t_0} \mid A_{f,t_0})(g)](t) = [\varphi_{t_0}(g(t_0))](t) =$

$$= \begin{cases} f(t) & \text{pentru } t \in T \setminus \{t_0\} \\ g(t_0) & \text{pentru } t = t_0 \end{cases} = g(t).$$

Mai mult, aplicaţia φ_{t_0} este un homeomorfism, căci mulţimile deschise din

A_{f,t_0} sînt de forma $\varphi_{t_0}(D_{t_0})$, D_{t_0} fiind o mulţime deschisă arbitrară din X_{t_0}. In adevăr, $g \in A_{f,t_0} \cap D$, unde D este deschisă în $\prod_{t\in T} X_t \iff g = \varphi_{t_0}(g(t_0)) \in D \iff$ există o mulţime deschisă D_{t_0} în X_{t_0} astfel încît $g \in \varphi_{t_0}(D_{t_0})$ [v.observaţia 1) de mai sus referitor la baza topologiei produs]. Prin urmare, spaţiul topologic produs $\prod_{t\in T} X_t$ conţine subspaţii homeomorfe cu oricare din spaţiile X_t.

7) Fie $f \in \prod_{t\in T} X_t$ un element fixat şi $t_0 \in T$ un indice fixat. Din cele dovedite la observaţia precedentă, rezultă că injecţia canonică continuă

$$\varphi_{t_0} : X_{t_0} \longrightarrow \prod_{t\in T} X_t ,$$

$$[\varphi_{t_0}(x)](t) = \begin{cases} f(t) & \text{pentru } t \in T \setminus \{t_0\} , \\ x & \text{pentru } t = t_0 , \end{cases}$$

unde $x \in X_{t_0}$, este o scufundare topologică (v.2.76). De fapt, φ_{t_0} este o secţiune continuă a surjecţiei continue p_{t_0} (v.şi 2.77).

8) Dacă $f \in \prod_{t\in T} X_t \neq \emptyset$, atunci mulţimea $A_f = \{h \in \prod_{t\in T} X_t \mid h(t) = f(t)$ cu excepţia unui număr finit de elemente $t \in T\}$ este densă în $\prod_{t\in T} X_t$ (v.2.20). In acest scop este suficient să arătăm că oricare ar fi o mulţime deschisă nevidă D din $\prod_{t\in T} X_t$, $D \cap A_f \neq \emptyset$ (v.2.21). Să observăm că oricare ar fi $g \in D \subset \prod_{t\in T} X_t$, există o mulţime $B = \prod_{t\in T} Q_t \subset D$ din baza pentru topologia produs ce conţine pe g, unde $Q_t = X_t$ cu excepţia unei submulţimi finite $T_1 \subseteq T$ [v. 4.2.1)]. Dacă definim $h \in \prod_{t\in T} X_t$ prin :

$$h(t) = \begin{cases} g(t) & \text{pentru orice} \quad t \in T_1 , \\ f(t) & \text{pentru orice} \quad t \in T \setminus T_1 , \end{cases}$$

atunci $h \in A_f$ şi $h \in B \subset D$, adică $A_f \cap D \neq \emptyset$.

9) Dacă $(\prod_{t\in T} X_t, \prod_{t\in T} \mathcal{T}_t)$ este un spaţiu topologic compact nevid, atunci pentru orice $t \in T$, $(X_t, \mathcal{T}_t)$ este un spaţiu topologic compact. In adevăr, oricare ar fi $t_o \in T$, proiecţia canonică $p_{t_o} : \prod_{t\in T} X_t \longrightarrow X_{t_o}$ este o surjecţie continuă, aşa încît afirmaţia precedentă este o consecinţă imediată a propoziţiei 3.16.

Exemple. 1) Fie $X=(0,1)$ cu topologia indusă de topologia canonică pe $\mathbb{R}$. Să considerăm produsul cartezian $X \times X$ şi proiecţiile canonice $p_i : X \times X \to X$ $(i=1,2)$, definite prin

$$p_1(x,y)=x, \quad p_2(x,y)=y.$$

Dacă D_1 este un interval deschis din X, "cilindrul plin" $p_1^{-1}(D_1)$ este banda verticală haşurată din figura 1.1.

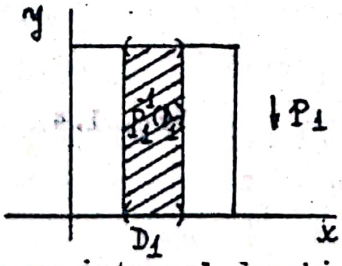


Fig.1.1

Dacă D_2 este un interval deschis din X, $p_2^{-1}(D_2)$ este banda orizontală haşurată din figura 1.2.

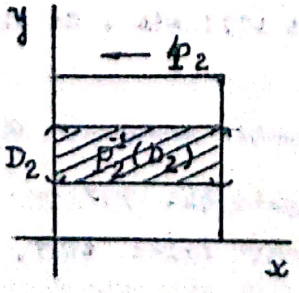


Fig.1.2

Prin urmare, $p_1^{-1}(D_1)\ p_2^{-1}(D_2)=D_1 \times D_2$ este interiorul pătratului haşurat din figura 1.3.

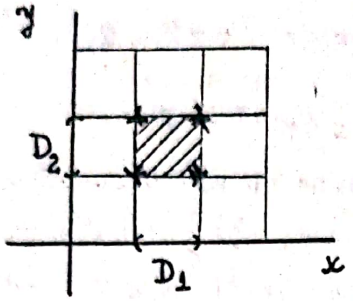


Fig.1.3

Deoarece intervalele deschise formează o bază pentru topologia pe X, rezultă că celulele bidimensionale deschise formează o bază pentru topologia produs pe X x X, adică topologia produs pe XxX coincide cu topologia indusă pe X x X de topologia canonică pe $\mathbb{R}^2$ (v.şi 2.43).

2) Fie cercul unitate S^1 cu topologia indusă de topologia canonică a lui $\mathbb{R}^2$ şi să considerăm produsul cartezian $S^1 \times S^1$ ce reprezintă torul bidimensional. Atunci o bază pentru topologia produs pe tor este dată de familia "petecelor dreptunghiulare" de tipul celui haşurat în figura 1.4.

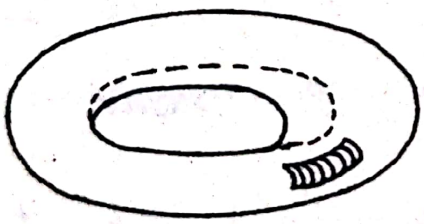


Fig. 1.4

Se constată imediat că topologia produs pe $S^1 \times S^1$ coincide cu topologia indusă pe tor de topologia canonică a lui $\mathbb{R}^3$ (v.şi 2.43). In acest scop n-avem decît să utilizăm , de exemplu, propoziţia 2.40.

4.3 <u>Propoziţie</u>. Fie Y un spaţiu topologic şi $\{X_t\}_{t\in T}$ o familie de spaţii topologice. O aplicaţie $f:Y \longrightarrow \prod_{t\in T} X_t$ este continuă dacă şi numai dacă pentru orice $t\in T$, aplicaţia

$p_t \circ f : Y \longrightarrow X_t$ este continuă (un caz particular al acestei afirmaţii îl constituie propoziţia 2.59).

Demonstraţie. Proiecţia canonică p_t este continuă v. observaţia 4.2,3) . Dacă f este continuă, atunci pentru orice $t \in T$ şi aplicaţia $p_t \circ f : Y \longrightarrow X_t$ este continuă (v.2.57). Reciproc, să presupunem că $p_t \circ f$ este continuă pentru orice $t \in T$. Dacă $t_o \in T$ şi D_{t_o} este deschisă în X_{t_o}, atunci mulţimea $M = p_{t_o}^{-1}(D_{t_o})$ este deschisă în $\prod_{t \in T} X_t$ şi mulţimea $f^{-1}(M) = f^{-1}(p_{t_o}^{-1}(D_{t_o})) = (p_{t_o} \circ f)^{-1}(D_{t_o})$ este deschisă în Y, căci $p_{t_o} \circ f$ este continuă. Dar mulţimile de tip M formează o subbază pentru topologia produs [v.observaţia 2) ce succede lui 2.38], deci continuitatea lui f este o consecinţă a propoziţiei 2.52.

Q. E. D.

4.4. Observaţie. Fie $\{X_t\}_{t \in T}$ o familie de spaţii topologice şi Y o mulţime. Să presupunem că pentru fiecare $t \in T$ este dată o aplicaţie $f_t : Y \longrightarrow X_t$. Atunci putem defini o aplicaţie $f : Y \longrightarrow \prod_{t \in T} X_t$ prin $[f(y)](t) = f_t(y)$, $y \in Y$. Aplicaţia f satisface evident condiţia $p_t \circ f = f_t$ pentru orice $t \in T$. Dacă Y este un spaţiu topologic, atunci în baza lui 4.3 rezultă că f este continuă dacă şi numai dacă f_t este continuă pentru orice $t \in T$. In particular, dacă $T = \{1, \ldots, n\}$ şi $X_t = \mathbb{R}$ pentru orice $t \in T$, v. şi afirmaţia 2.59.

4.5. Propoziţie. Fie $\{X_t\}_{t \in T}$, $\{Y_t\}_{t \in T}$ două familii de spaţii topologice indexate de aceeaşi mulţime T astfel încît $X_t \neq \emptyset$, oricare ar fi $t \in T$, şi $\{f_t : X_t \longrightarrow Y_t\}_{t \in T}$ o familie de aplicaţii. Atunci aplicaţia $\prod_{t \in T} f_t : \prod_{t \in T} X_t \longrightarrow \prod_{t \in T} Y_t$ [v.1.39,3)] este continuă dacă şi numai dacă $f_t : X_t \longrightarrow Y_t$ este

continuă pentru orice $t \in T$.

Demonstrație. Fie $f = \prod_{t\in T} f_t$ și pentru $t \in T$, fie $p_t : \prod_{u\in T} X_u \longrightarrow X_t$ și $p'_t : \prod_{u\in T} Y_u \longrightarrow Y_t$ proiecțiile canonice corespunzătoare. In baza lui 4.3, f este continuă dacă și numai dacă $p'_t \circ f$ este continuă pentru orice $t \in T$. Dar $p'_t \circ f = f_t \circ p_t$ [v.1.39,3)] , așa încît f este continuă dacă și numai dacă $f_t \circ p_t$ este continuă pentru orice $t \in T$. Prin urmare, dacă f_t este continuă pentru orice $t \in T$, atunci și f este continuă. Reciproc, dacă f este continuă, atunci $f_t \circ p_t = p'_t \circ f$ este continuă pentru orice $t \in T$, de unde rezultă că f_t este continuă pentru orice $t \in T$. In adevăr, acest fapt este o consecință imediată a propoziției 2.56 (b), căci p_t este o aplicație deschisă surjectivă pentru orice $t \in T$ [v.4.2,3)] .

Q. E. D.

4.6 Propoziție . Fie X un spațiu topologic și Y un spațiu topologic compact. Atunci proiecția canonică $p_1 : X \times Y \longrightarrow X$, $p_1(x,y)=x$, $x \in X, y \in Y$, este o aplicație închisă.

Demonstrație. Dacă $Y = \emptyset$, proprietatea este evident adevărată, căci în acest caz $X \times Y = \emptyset$. Să presupunem deci că $Y \neq \emptyset$. Fie F o submulțime închisă din $X \times Y$ și fie $E = p_1(F)$. Să arătăm că E este o submulțime închisă din X. Vom arăta că $C_X(E)$ este o mulțime deschisă. Fie $x \in C_X(E)$. Atunci $p_1^{-1}(\{x\}) = \{x\} \times Y$ este homeomorf cu Y [v.4.2, 6)], de unde rezultă că $p_1^{-1}(\{x\})$ este o submulțime compactă din $X \times Y$ (v.3.16). Fie $\mathcal{V}_x = \{A_x \times B \mid A_x$ este o mulțime deschisă din X astfel încît $x \in A_x$, B este o multime deschisă din Y și $(A_x \times B) \cap F = \emptyset\}$. $\mathcal{V}_x$ este o $X \times Y$-acoperire pentru $p_1^{-1}(\{x\})$ (v.3.4.), așa încît va exista o subfamilie finită $\{A_x^i \times B^i \mid i=1,\ldots,n\}$ a lui $\mathcal{V}_x$ ce este o $X \times Y$ - acoperire pentru $p_1^{-1}(\{x\})$ [v.3.8,1)].

Deoarece $Y \neq \emptyset$, această subfamilie conține cel puțin o mulțime deschisă nevidă de forma $A_x \times B$. Fie $D_x = \bigcap_{i=1}^{n} A_x^i$. Atunci D_x

este o mulțime deschisă din X, $x \in D_X$ și pentru orice mulțime deschisă B din Y, $(D_X \times B) \cap F = \emptyset$. Deoarece $\emptyset = (D_X \times Y) \cap F = p_1^{-1}(D_X) \cap F$, rezultă $D_X \cap E = \emptyset$. In adevăr, dacă am presupune că ar exista $u \in D_X \cap E$, atunci $u \in D_X$ și există $v \in F$ astfel încît $p_1(v) = u \in D_X$, adică $v \in p_1^{-1}(D_X) \cap F$, ceea ce este absurd. Deci $D_X \subset C_X(E)$, ceea ce arată că $C_X(E)$ este deschisă în X [v.2.5,7)] și prin urmare, E este închisă în X.

Q. E. D.

4.7. Propoziție. Dacă X și Y sînt spații topologice compacte, atunci $X \times Y$ este compact.

Demonstrație. Dacă $X = \emptyset$ sau $Y = \emptyset$, propoziția este evident adevărată. Putem deci presupune $X \neq \emptyset$ și $Y \neq \emptyset$. In baza lui 4.6, proiecția canonică $p_1 : X \times Y \longrightarrow X$ este o aplicație închisă. Deoarece pentru orice $x \in X$, $p_1^{-1}(\{x\})$ este o submulțime compactă din $X \times Y$ (v.demonstrația propoziției precedente), în baza lui 3.22, p_1 este o aplicație proprie. Dar X este un spațiu topologic compact, astfel încît $p_1^{-1}(X) = X \times Y$ va fi un spațiu topologic compact (v.3.20).

Q. E. D.

4.8. Corolar. Orice produs finit de spații topologice compacte este compact.

Vom vedea puțin mai tîrziu că această proprietate poate fi extinsă și a orice produs infinit (teorema lui Tihonov).

4.9. Exemple. Prin definiție un n-paralelipiped drept din $\mathbb{R}^n$ este un produs cartezian de n intervale închise și mărginite din R. In baza corolarului 4.8 o asemenea submulțime din $\mathbb{R}^n$ este compactă [v.și exemplul 3.9,2)] .

Torul n-dimensional $T^n = S^1 \times \ldots \times S^1$ (n-ori) este compact, căci S^1 este compact [v.3.9,3)] . Torul plin $D^2 \times S^1$ este de

asemenea compact, deoarece discul unitate închis bidimensional D^2 este compact.

Considerarea topologiei produs ne conduce imediat la o primă aplicaţie interesantă.

4.10. Propoziţie. Dacă $m \neq n$, atunci $\mathbb{R}^m$ nu poate fi homeomorf cu $\mathbb{R}^n$.

Demonstraţie. Procedăm prin reducere la absurd, anume presupunem că $n=m+p$ unde $p > 0$ şi că există un homeomorfism $\Psi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Topologia obişnuită a lui $\mathbb{R}^n$ coincide cu topologia produs $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ şi aplicaţia $\varphi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \{0\}$, $\varphi(x)=(x,0)$, $x \in \mathbb{R}^m$, este un homeomorfism [v.4.2,6)] . Dar $\mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$, astfel încît $\varphi \circ \Psi^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ este o injecţie continuă a cărei imagine $\mathbb{R}^m \times \{0\}$ nu este deschisă în $\mathbb{R}^n$, ceea ce contrazice teorema lui Brouwer (v.observaţia ce prevede 2.79).

Q. E. D.

Propoziţia 4.10 afirmă în esenţă că dimensiunea spaţiului aritmetic $\mathbb{R}^n$ este un invariant topologic. Acest rezultat a fost dovedit pentru prima oară de către L.E.J. Brouwer [5] cu ajutorul noţiunii de grad al unei aplicaţii continue. Pînă la sfîrşitul secolului trecut s-a bănuit în mod naiv că dimensiunea este un invariant al aplicaţiilor continue. De exemplu, se credea că imaginea unui interval al lui $\mathbb{R}$ printr-o aplicaţie continuă este fie un punct fie o submulţime unidimensională a spaţiului în care aplicaţia ia valori. Descoperirea lui Peano din 1890, anume că există o aplicaţie continuă surjectivă $f : [0,1] \longrightarrow [0,1] \times [0,1]$ a produs atunci senzaţie, fiind considerată un fapt cu totul paradoxal; în acelaşi timp ea a constituit alături de teorema lui Jordan (v.cap.VI) unul din momentele extrem de importante în dezvoltarea ideilor geometrice ale topologiei. Vom descrie acum pe scurt exemplul lui Peano. In acest scop, să considerăm întîi

mulţimea lui Cantor, adică mulţimea K a tuturor numerelor x din $[o,1]$ ce pot fi scrise în sistemul ternar fără a folosi cifra 1, adică

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n / 3^n \quad , \text{ unde } a_n=o \text{ sau } a_n=2.$$

De exemplu,

$$\frac{1}{9} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{3^n} \in K, \quad \frac{1}{3} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{3^n} \in K, \quad \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \in K, \quad \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{0}{3^2} + \ldots \in K, \quad \frac{3}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{2n-1}} \in K.$$

Dacă notăm cu G_k numerele din $[o,1]$ care în sistemul ternar nu pot fi scrise fără a folosi pe 1 în locul numărătorului termenului de ordinul k al dezvoltării $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}$, $k=1,2,\ldots$, atunci $G_1=(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $G_2 = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{4}{9}, \frac{5}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$, ş.a.m.d. şi $K = [o,1] \setminus (\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k)$. Deci K este o submulţime închisă a lui $[o,1]$, aşa încît K este o submulţime compactă. Mulţimea K din $\mathbb{R}$ are măsura zero căci suma lungimilor intervalelor ce intervin in mulţimile de tip G_k este egală cu 1, aşa încît K este şi o mulţime rară v.exemplul 2) ce succede lui 2.23) . Fie $g:K \longrightarrow [o,1] \times [o,1]$ aplicaţia care la fiecare element $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ ($a_n=o$ sau $a_n=2$) din mulţimea lui Cantor ataşează perechea de numere

$$\left(\sum \frac{b_{2n+1}}{2^n} \quad , \quad \sum \frac{b_{2n}}{2^n} \right)$$

unde $b_m=a_m/2$. Atunci se poate arăta că f este bine definită, surjectivă şi continuă, Pe de altă parte, aplicaţia $h:K \longrightarrow [o,1]$ care la fiecare element $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/3^n$ ($a_n=o$ sau $a_n=2$) asociază elementul $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n}$, unde $b_n = \frac{a_n}{2}$, este o bijecţie. In

adevăr, fiecare număr din K se scrie în sistem ternar folosind cifrele 0 şi 2, aşa încît schimbînd toate cifrele 2 în 1 şi citind rezultatul în sistem binar obţinem un număr din $[0,1]$. Procedînd exact ca înainte, se poate arăta că h este continuă, deci h este un homeomorfism (v.5.16). Aplicaţia continuă surjectivă $f=goh^{-1}:[0,1]\longrightarrow[0,1]\times[0,1]$ se numeşte <u>curba lui Peano</u>. Să observăm că intervalul $[0,1]$ are dimensiunea 1 în timp ce imaginea sa prin aplicaţia f are dimensiunea 2. Pentru o descriere directă a curbei lui Peano, datorată lui Sierpinski, v. [19], pp.255-256. Alţi matematicieni, în urma lui Peano, au dat exemple mai simple de astfel de curbe. Un asemenea exemplu, datorat lui I.J.Schoenberg [28], este tratat în detaliu în [24] pp.131-132. Să precizăm acest exemplu. Fie $\varphi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ o funcţie continuă, periodică, cu perioada 2, definită în intervalul $[-1,1]$ prin

$$\varphi(t)=\begin{cases}0 \text{ pentru } & t\in\left[-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right],\\ 3|t|-1 \text{ pentru } & t\in\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),\\ 1 \text{ pentru } & t\in\left[-1,-\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right].\end{cases}$$

Atunci aplicaţia $f:[0,1]\longrightarrow[0,1]\times[0,1]$, $f(t)=(f_1(t),f_2(t))$, unde:

$$f_1(t)=\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2^2}\varphi(3^2t)+\frac{1}{2^3}\varphi(3^4t)+\ldots,$$

$$f_2(t)=\frac{1}{2}\varphi(3t)+\frac{1}{2^2}\varphi(3^3t)+\frac{1}{2^3}\varphi(3^5t)+\ldots,$$

este continuă şi surjectivă.

Ne vom ocupa în continuare cu alte proprietăţi ale topologiei produs.

4.11. <u>Definiţie</u>. Un spaţiu topologic X se zice că satisface <u>prima axiomă de numărabilitate</u> dacă, pentru fiecare punct

$x \in X$, există o familie finită sau numărabilă $\{ D_x(1), D_x(2), \ldots, D_x(n), \ldots \}$ de mulțimi deschise ce conțin pe x astfel încît dacă D este orice mulțime deschisă ce conține pe x, atunci există un $n \in \mathbb{N}$ astfel încît $D_x(n) \subset D$.

Exemplu. Dacă (M, ρ) este un spațiu metric, atunci M satisface prima axiomă de numărabilitate, căci pentru fiecare $x \in M$ familia numărabilă de celule deschise $\{ B(x, \frac{1}{n}) \mid n=1,2,\ldots \}$ satisface proprietățile cerute.

Un produs topologic de spații metrizabile nu este în mod necesar un spațiu metrizabil, adică pe un spațiu produs de spații metrizabile nu există în general o metrică astfel încît topologia generată de această metrică să coincidă cu topologia produs. De exemplu are loc următoarea afirmație :

4.12. Propoziție. Pentru fiecare $r \in \mathbb{R}$, fie $I_r = [0,1]$. Fie $P = \prod_{r \in \mathbb{R}} I_r$. Atunci P nu satisface prima axiomă de numărabilitate. In particular, P nu este metrizabil, adică pe P nu există o metrică ρ astfel încît topologia generată de această metrică să coincidă cu topologia produs pe P.

Demonstrație. Fie $p \in P$; de exemplu putem lua p astfel încît $p(r) = 0$ oricare ar fi $r \in \mathbb{R}$. Presupunem că există o familie finită sau numărabilă $\{ D_1, \ldots, D_n, \ldots \}$ de mulțimi deschise ce conțin p astfel încît pentru fiecare mulțime deschisă D ce conține p, există n astfel încît $D_n \subset D$. Vom arăta că această ipoteză : conduce la o contradicție, ceea ce va dovedi că P nu satisface prima axiomă de numărabilitate. Deoarece fiecare D_n este deschisă în P, există un element al bazei pentru o topologie pe P, $\tilde{D}_n$, astfel încît $p \in \tilde{D}_n \subset D_n$. In particular, pentru fiecare mulțime deschisă D ce conține pe p, există un n astfel încît $\tilde{D}_n \subset D$. Dar, pentru fiecare n, există o submulțime finită $F_n \subset \mathbb{R}$ astfel încît

$\tilde{D}_n = \prod_{r\in\mathbb{R}} T_{n,r}$, unde $T_{n,r} = \begin{cases} I_r & \text{pentru } r \in F_n, \\ D_{n,r} & \text{pentru } r \in F_n \end{cases}$

și $D_{n,r}$ este o mulțime deschisă în I_r pentru fiecare $r \in F_n$. Fie $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Atunci C este o uniune numărabilă de mulțimi finite, deci numărabilă. In particular, $C \neq \mathbb{R}$, adică există un $r_0 \in \mathbb{R} \setminus C$ și $T_{n,r_0} = I_{r_0}$ pentru fiecare n, adică coordonata de indice r_0 nu este supusă la nici o condiție în fiecare $\tilde{D}_n$. Astfel, dacă $D_{r_0} \subset I_{r_0}$, $D_{r_0} \neq I_{r_0}$, atunci $D = \prod_{r\in\mathbb{R}} S_r$, unde $S_r = \begin{cases} I_r & \text{pentru } r \neq r_0, \\ D_{r_0} & \text{pentru } r = r_0 \end{cases}$ este deschisă în P și D nu conține nici o mulțime de forma $\tilde{D}_n$. Q. E. D.

Observație. Dacă T este o mulțime de cardinal mai mare decît $\aleph_0$ și în fiecare X_t există cel puțin o mulțime deschisă diferită de $\emptyset$ și X_t, atunci se poate arăta că produsul topologic $\prod_{t\in T} X_t$, nu satisface prima axiomă de numărabilitate, v. [29], p. 32.

Dacă prin exemplul de mai sus am văzut că produsul topologic al unei familii $\{X_t\}_{t\in T}$ de spații metrizabile, pentru care cardinalul lui T este c, poate să nu fie metrizabil, în schimb produsul topologic al unei familii finite sau numărabile de spații metrizabile este metrizabil.

4.13. Propoziție. Produsul topologic $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ al spațiilor metrizabile X_n este metrizabil.

Demonstrație. In baza ipotezei, pe X_n există o metrică ρ_n care determină topologia lui X_n. Fără a restrînge generalitatea, putem presupune că $\rho_n(x_n, y_n) \leqslant 1$, oricare ar fi $x_n, y_n \in X_n$ [v.3.42, 1)]. Fie $\{c_n\}$ un șir de numere reale astfel încît $c_n > 0$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ și seria $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ să fie convergentă.

Pentru orice două puncte $x,y \in X$ să definim

$$(*) \quad \varrho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varrho_n (p_n(x), p_n(y)),$$

unde $p_n : X \longrightarrow X_n$ notează proiecţia canonică. Deoarece $\varrho_n \leqslant 1$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$, $\varrho(x,y)$ există. Deoarece $c_n > 0$ şi $\varrho_n \geqslant 0$, $\varrho(x,y)=0$ dacă şi numai dacă $\varrho_n(p_n(x), p_n(y))=0$ pentru orice n, ceea ce este echivalent cu $x=y$. Egalitatea $\varrho(x,y)=\varrho(y,z)$ este evidentă. In sfîrşit, dacă $z \in X$, atunci

$$\varrho(x,y)+\varrho(y,z)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n[\varrho_n(p_n(x),p_n(y))+\varrho_n(p_n(y),p_n(z))] \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varrho_n(p_n(x),p_n(z)) = \varrho(x,z).$$

Prin urmare, aplicaţia $\varrho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ definită prin $(*)$ este o metrică pe X, numită <u>metrică produs</u>. Fie $\mathcal{T}$ topologia iniţială pe X, adică topologia produs pe X, şi $\mathcal{T}'$ topologia indusă pe X de metrica ϱ. Trebuie să dovedim că $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$. Fie $D \in \mathcal{T}$, $D \neq \emptyset$. Vom arăta întîi că pentru fiecare $x \in D$ există un număr real $\varepsilon_x > 0$ astfel încît celula deschisă $B_\varrho(x, \varepsilon_x) \subset D$, ceea ce va implica $D = \bigcup_{x \in D} B_\varrho(x, \varepsilon_x)$, adică $D \in \mathcal{T}'$. Ţinînd seama de definiţia bazei pentru topologia produs [v.4.2,1)], există o mulţime deschisă de forma $V = \bigcap_{i \in A} p_i^{-1}(U_i)$, unde A este o submulţime finită a mulţimii numerelor naturale, $p_i : X \longrightarrow X_i$ este proiecţia canonică şi U_i este deschisă în X_i, oricare ar fi $i \in A$, astfel încît $x \in V \subset D$. Deoarece U_i este deschisă în X_i şi $p_i(x) \in U_i$, există un număr real $\varepsilon_{i,x} > 0$ astfel încît $B_{\varrho_i}(p_i(x), \varepsilon_{i,x}) \subset U_i$. Fie $\varepsilon_x = \min_{i \in A} \{ c_i \varepsilon_{i,x} \}$. Atunci $B_\varrho(x, \varepsilon_x) \subset D$, căci oricare ar fi $y \in B_\varrho(x, \varepsilon_x)$, $\varrho(x,y) < \varepsilon_x \leqslant c_i \varepsilon_{i,x}$, oricare ar fi $i \in A$, de unde rezultă $\varrho_i(p_i(x), p_i(y)) < \varepsilon_{i,x}$, oricare ar

fi $i \in A$, ceea ce implică $p_i(y) \in B_{\varrho_i}(p_i(x), \varepsilon_{i,x}) \subset U_i$, oricare ar fi $i \in A$, adică $y \in V \subset D$. Deci $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$.

Reciproc, să arătăm că orice mulțime din $\mathcal{T}'$ aparține și lui $\mathcal{T}$. Deoarece orice mulțime din $\mathcal{T}'$ este o uniune de celule deschise în raport cu metrica ϱ, este suficient să arătăm că pentru fiecare $y \in B_\varrho(x,r), r > 0$, există $D_y \in \mathcal{T}$ astfel încît $y \in D_y \subset B_\varrho(x,r)$. In acest caz $B_\varrho(x,r) = \bigcup_{y \in B_\varrho(x,r)} D_y$ și prin urmare orice mulțime din $\mathcal{T}'$ va fi o uniune de elemente din $\mathcal{T}$, deci va aparține și lui $\mathcal{T}$. Dacă $y \in B_\varrho(x,r)$, există $\varepsilon_y > 0$ astfel încît $y \in B_\varrho(y, \varepsilon_y) \subset B_\varrho(x,r)$. Fie numărul natural p astfel încît $\sum_{n=p+1}^{\infty} c_n < \frac{1}{2}\varepsilon_y$. Fie $\delta_y = \frac{1}{2}\varepsilon_y \left(\sum_{n=1}^{p} c_n\right)^{-1}$. Dacă notăm

$$D_{n,y} = \begin{cases} B_{\varrho_n}(p_n(y), \delta_y), & n \leqslant p, \\ X_n, & n > p, \end{cases}$$

atunci

$$D_y = \prod_{n=1}^{\infty} D_{n,y} \in \mathcal{T}.$$

In plus să observăm că $y \in D_y \subset B_\varrho(y, \varepsilon_y) \subset B_\varrho(x,r)$.
In adevăr, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $p_n(y) \in D_{n,y}$ și oricare ar fi $z \in D_y$,

$$\varrho(y,z) = \sum_{n=1}^{p} c_n \varrho_n(p_n(y), p_n(z)) + \sum_{n=p+1}^{\infty} c_n \varrho_n(p_n(y), p_n(z)) <$$

$$< \left(\sum_{n=1}^{p} c_n\right)\delta_y + \sum_{n=p+1}^{\infty} c_n < \frac{1}{2}\varepsilon_y + \frac{1}{2}\varepsilon_y = \varepsilon_y,$$

adică $z \in B_\varrho(y, \varepsilon_y)$.

Q. E. D.

4.14 Observații. 1) Am văzut deja că orice produs cartezian finit de k spații metrice este metrizabil [v. 3.33,1)]. O metri-

că corespunzătoare lui (*) va fi atunci definită prin

$$\varrho(x,y) = \sum_{n=1}^{k} c_n \varrho_n(x_n,y_n),$$

unde $c_n > 0$ sînt numere reale, $x=(x_1,\dots,x_k)$, $y=(y_1,\dots,y_k)$. In acest caz se poate renunţa la ipoteza $\varrho_n \leqslant 1$, oricare ar fi $n=1,\dots,k$.

2) In baza propoziţiei 4.13, produsul topologic $\prod_{n=1}^{\infty} I_n$, unde $I_n=I=[0,1]$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$, ce poate fi identificat cu $I^{\mathbb{N}}$, este metrizabil. O metrică pe $I^{\mathbb{N}}$ de tip (*) ce generează topologia produs poate fi atunci definită prin relaţia

$$(**) \qquad \varrho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mid y_n-x_n \mid$$

unde $c_n > 0$ sînt numere reale astfel încît seria $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ să fie convergentă, $x=(x_1,\dots,x_n,\dots)$, $y=(y_1,\dots,y_n,\dots)$. In adevăr, n-avem decît să observăm că $\mid y_n-x_n \mid \leqslant 1$ oricare ar fi $n=1,2,\dots$ Se poate arăta că aplicaţia

$$\varrho' : I^{\mathbb{N}} \times I^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R},\ \varrho'(x,y)=\Big[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(y_n-x_n)^2\Big]^{1/2},$$

defineşte o metrică pe $I^{\mathbb{N}}$ care generează aceeaşi topologie ca şi metrica definită de (**), unde $c_n=\frac{1}{n^2}$. Spaţiul metric $(I^{\mathbb{N}},\varrho')$ se numeşte <u>cubul lui Hilbert</u>. Să observăm că aplicaţia injectivă $\Psi : I^{\mathbb{N}} \longrightarrow \ell^2(\mathbb{R})$, $\Psi(x_1,x_2,\dots,x_n,\dots)=(x_1,\frac{1}{2}x_2,\dots,\frac{1}{n}x_n,\dots)$, $x_n\in[0,1]$, oricare ar fi $n=1,2,\dots$, unde $\ell^2(\mathbb{R})$ notează spaţiul Hilbert al şirurilor de numere reale de pătrat sumabil, este o scufundare izometrică a cubului lui Hilbert în $\ell^2(\mathbb{R})$. In adevăr, pentru orice $x,y\in I^{\mathbb{N}}$, $d(\Psi(x),\Psi(y)) = \varrho'(x,y)$, unde $d : \ell^2(\mathbb{R}) \times \ell^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ este metrica canonică definită prin

$$d(u,v) = \Big[\sum_{i=1}^{\infty} (v_i-u_i)^2\Big]^{1/2},\quad u=\{u_i\},\quad v=\{v_i\}.$$

Teorema lui Tihonov şi consecinţe

Un fapt important ce atestă că topologia produs definită la 4.1 este "bună" pentru produsele infinite de spaţii topologice (mai bună, de exemplu, decît una în care produsele de infinit de multe submulţimi deschise proprii ale factorilor sînt permise ca mulţimi deschise ale bazei topologiei produs) îl constituie teorema lui Tihonov : orice produs topologic de spaţii compacte este compact. Demonstraţia acestei teoreme poate fi găsită de exemplu în [34].

4.15. Observaţie. Fie $\{(X_t, \mathcal{T}_t)\}_{t\in T}$ o familie arbitrară de spaţii topologice şi să presupunem că pentru fiecare $t\in T$, spaţiul topologic $(X_t, \mathcal{T}_t)$ verifică o anumită proprietate. Dacă această proprietate rămîne valabilă şi pentru produsul topologic $\prod_{t\in T} X_t$, atunci se zice că ea este multiplicativă. Prin urmare, teorema lui Tihonov este echivalentă cu următoarea afirmaţie: compacitatea este o proprietate multiplicativă. In schimb proprietatea unui spaţiu topologic de a fi metrizabil nu este multiplicativă (v.4.12).

Să stabilim mai departe cîteva consecinţe ale teoremei lui Tihonov. Să arătăm întîi că orice produs cartezian generalizat al unei familii de aplicaţii proprii este o aplicaţie proprie. Mai precis, fie $\{X_t\}_{t\in T}$, $\{Y_t\}_{t\in T}$ două familii de spaţii topologice indexate de aceeaşi mulţime T şi $\{f_t : X_t \longrightarrow Y_t\}_{t\in T}$ o familie de aplicaţii proprii (v.3.20). Atunci aplicaţia $\prod_{t\in T} f_t$: $: \prod_{t\in T} X_t \longrightarrow \prod_{t\in T} Y_t$ este proprie. In adevăr, dacă K este un compact din $\prod_{t\in T} Y_t$ şi $p_t' : \prod_{u\in T} Y_u \longrightarrow Y_t$ este proiecţia canonică, atunci în baza teoremei lui Tihonov şi a propoziţiei 3.18, $(\prod_{t\in T} f_t)^{-1}(K) = \prod_{t\in T} f_t^{-1}(p_t'(K))$ este un compact din $\prod_{t\in T} X_t$.

Să stabilim acum o altă consecinţă a teoremei lui Tihonov. Fie X un spaţiu topologic compact, $S\subset X$ o submulţime cu topologia relativă, Y un spaţiu topologic şi $f : S \longrightarrow Y$ o aplicaţie

continuă. Este interesant de ştiut în ce condiţii f admite o prelungire continuă $g:X \longrightarrow Y$ (v.1.18) definită pe compactul X. In cazul cînd Y este $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$ (sau, mai general, un spaţiu vectorial normat real finit dimensional), vom preciza mai departe condiţii suficiente pentru ca acest lucru să fie posibil (v.4.16). Aşa după cum vom vedea din demonstraţia lui 4.16, această teoremă de "prelungire" este în esenţă, o consecinţă a teoremei lui Tihonov. Inainte de a enunţa şi demonstra acest rezultat, vom considera două exemple, dintre care cel de-al doilea ilustrează punctele principale ale demonstraţiei lui 4.16. Dacă $X = [0,1]$, $S=(0,1]$, $Y= \mathbb{R}$ şi $f:S \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, atunci funcţia continuă f poate fi prelungită la o funcţie continuă pe compactul $[0,1]$ punînd $f(0)=0$. Să considerăm acum alt exemplu, Fie $S= (0,1]$ şi $f:S \longrightarrow \mathbb{R}$ funcţia continuă definită prin $f(x)= \sin \frac{1}{x}$, $x \in S$. In acest caz este clar că f nu poate fi prelungită la o funcţie continuă pe compactul $[0,1]$, adică deşi prin adăugarea unui punct la S obţinem un spaţiu compact, nu putem prelungi f prin continuitate la acest spaţiu compact. Vom arăta însă că dacă vom "adăuga" suficient de multe puncte lui S putem obţine un spaţiu compact X, o scufundare topologică $\varphi : S \longrightarrow X$ şi o funcţie continuă $g:X \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încît $\overline{\varphi(S)}=X$ [adică $\varphi(S)$ este densă în X] şi $g \circ \varphi = f$. Prin urmare, dacă în loc de S vom considera imaginea sa homeomorfă $\varphi(S)$ şi în loc de funcţia $f:S \longrightarrow \mathbb{R}$ vom considera funcţia $f_1 = f \circ \varphi^{-1}: \varphi(S) \longrightarrow \mathbb{R}$, atunci funcţia continuă f_1 poate fi prelungită la funcţia continuă g definită pe compactul $X \supset \varphi(S)$. In adevăr, fie $X_1 = [0,1] \times [-1,1]$ şi $\varphi : S \longrightarrow X_1$ aplicaţia definită prin $\varphi(x)=(x, \sin \frac{1}{x})$ $x \in S$. Dacă considerăm proiecţia canonică $p_2: [0,1] \times [-1,1] \longrightarrow [-1,1]$, $p_2(x,y)=y$, $x \in [0,1]$, $y \in [-1,1]$, atunci $i \circ p_2 \circ \varphi = f$, unde: $i: [-1,1] \subset \mathbb{R}$ este aplicaţia de incluziune. Prin urmare, $X = \overline{\varphi(S)} \subset X_1$, φ şi $g = i \circ p_2 |_X$ au proprietăţile specificate mai sus.

4.16. Propoziţie. Fie $\mathcal{F}$ o familie de funcţii continue real (resp. complex) valuate definite pe spaţiul topologic S cu proprietatea că fiecare $u \in \mathcal{F}$ este o funcţie mărginită, adică $u(S) \subset I_u$, unde I_u este un interval închis mărginit (resp. o celulă închisă mărginită) pentru fiecare $u \in \mathcal{F}$. Atunci există

a) un spaţiu topologic compact X,

b) o aplicaţie continuă $\varphi : S \longrightarrow X$,

c) o familie $\tilde{\mathcal{F}}$ de funcţii continue real (resp. complex) valuate pe X

astfel încît $\overline{\varphi(S)} = X$ şi $\{ f \circ \varphi \mid f \in \tilde{\mathcal{F}} \} = \mathcal{F}$. Dacă în plus $\mathcal{F}$ separă punctele lui S, adică pentru fiecare $s_1 \neq s_2$ $(s_1, s_2 \in S)$ există o funcţie $u \in \mathcal{F}$ astfel încît $u(s_1) \neq u(s_2)$, atunci φ este injectivă.

Demonstraţie. Fie $X_1 = \prod_{u \in \mathcal{F}} I_u$ dotat cu topologia produs. Deoarece fiecare I_u este un compact, în baza teoremei lui Tihonov X_1 este un spaţiu topologic compact. Fie aplicaţia $\varphi : S \longrightarrow X_1$ definită prin $[\varphi(s)](u) = u(s)$. Să verificăm continuitatea lui φ. In acest scop este suficient să arătăm că imaginile inverse ale mulţimilor bazei topologiei produs sînt deschise în S (v.2.53). Dacă D este o mulţime deschisă a bazei topologiei produs pe X_1, atunci $D = \bigcap_{u \in \mathcal{F}_1} p_u^{-1}(D_u)$, unde $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$ este o submulţime finită şi D_u este deschisă în I_u pentru fiecare $u \in \mathcal{F}_1$ [v.4.2,1)]. Prin urmare,

$$\varphi^{-1}(D) = \left\{ s \in S \mid \varphi(s) \in \bigcap_{u \in \mathcal{F}_1} p_u^{-1}(D_u) \right\} = \left\{ s \in S \mid \varphi(s) \in p_u^{-1}(D_u) \right.$$

$$\left. \text{pentru fiecare } u \in \mathcal{F}_1 \right\} = \left\{ s \in S \mid p_u(\varphi(s)) = [\varphi(s)](u) = u(s) \in D_u \right.$$

$$\left. \text{pentru fiecare } u \in \mathcal{F}_1 \right\} = \bigcap_{u \in \mathcal{F}_1} u^{-1}(D_u).$$

Deoarece fiecare funcţie $u \in \mathcal{F}_1$ este continuă, $\varphi^{-1}(D)$ este o intersecţie finită de mulţimi deschise, deci este o mulţime deschisă. Fie $X = \overline{\varphi(S)}$. X este compact căci este o submulţime închisă a spaţiului compact X_1 (v.3.12). Deoarece $\varphi : S \longrightarrow X_1$ este continuă

rezultă că şi aplicaţia $\varphi : S \longrightarrow X$ este continuă (v.2.58). Să observăm apoi că pentru fiecare $s \in S$ şi fiecare $u \in \mathcal{F}$, $(p_u \circ \varphi)(s) = p_u(\varphi(s)) = [\varphi(s)](u) = u(s)$, adică $p_u \circ \varphi = u$ pentru orice $u \in \mathcal{F}$. Prin urmare, dacă definim $\widetilde{\mathcal{F}} = \{p_u \mid_X | u \in \mathcal{F}\}$, atunci $\{f \circ \varphi \mid f \in \widetilde{\mathcal{F}}\} = \mathcal{F}$. In sfîrşit, dacă pentru fiecare $s_1 \neq s_2$ $(s_1, s_2 \in S)$ există o funcţie $u \in \mathcal{F}$ astfel încît $u(s_1) \neq u(s_2)$, atunci $[\varphi(s_1)](u) = u(s_1) \neq u(s_2) = [\varphi(s_2)](u)$ pentru acel u, adică $\varphi(s_1) \neq \varphi(s_2)$.

Q. E. D.

4.17. Observaţii. 1) In exemplul ce precede 4.16 putem considera $S = (0,1]$ şi $\mathcal{F} = \{u_1, u_2\}$, unde $u_1(x) = \sin \frac{1}{x}$, $u_2(x) = x$, $x \in S$. Funcţia u_2 a fost adăugată pentru ca familia de funcţii să separe punctele lui S.

2) Dacă se identifică S cu $\varphi(S)$, atunci spaţiul topologic compact $\overline{\varphi(S)}$ este ceea ce se cheamă compactificarea Stone-Čech al lui S.

CAPITOLUL V

AXIOME DE SEPARATIE SI APLICATII CONTINUE

Axiome de separaţie.

Pentru conceptele topologice cu care am operat pînă în prezent nu era important dacă familia mulţimilor deschise era bogată sau săracă. Totuşi, spaţiile topologice ce intervin în mod obişnuit în aplicaţii sînt bogate în mulţimi deschise, aproape întotdeauna suficient de multe pentru "a separa" puncte şi adesea suficient de multe pentru "a separa" mulţimi închise. In esenţă, axiomele de separaţie au drept scop de a impune structurii topologice o anumită finete.

5.1. Definiţii. Fie X un spaţiu topologic ce conţine cel puţin două puncte. Se zice că X satisface axioma de separaţie T_0 sau că X este un spaţiu T_0, dacă, dată orice pereche de puncte distincte $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, există o mulţime deschisă D în X ce conţine unul din aceste puncte dar nu şi celălalt punct. Această axiomă de separaţie mai este cunoscută şi sub numele de axioma de separaţie a lui Kolmogorov.

Se zice că X satisface axioma de separaţie T_1 sau că X este un spaţiu T_1 dacă, dată orice pereche de puncte distincte $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, există o mulţime deschisă D_1 în X astfel încît $x_1 \in D_1$ dar $x_2 \notin D_1$ şi există o mulţime deschisă D_2 în X astfel încît $x_2 \in D_2$ dar $x_1 \notin D_2$. Spaţiile T_1 sînt cunoscute şi sub numele de spaţii separate în sens Fréchet.

Se zice că X satisface axioma de separaţie T_2 sau că X este un spaţiu T_2 sau un spaţiu Hausdorff, dacă pentru orice pereche de puncte distincte $x_1, x_2 \in X$ $(x_1 \neq x_2)$, există mulţimile deschise D_1 şi D_2 în X cu proprietatea $x_i \in D_i$ $(i=1,2)$ şi

astfel încît $D_1 \cap D_2 = \emptyset$.

Litera T utilizată pentru a desemna asemenea tipuri de spaţii topologice este litera iniţială a cuvîntului german "Trennung", care înseamnă "separaţie".

5.2. Observaţii. 1) Orice spaţiu T_2 este un spaţiu T_1 şi orice spaţiu T_1 este un spaţiu T_0 .

Un exemplu de spaţiu T_0 care nu este un spaţiu T_1 este spaţiul topologic $(X,\mathcal{T})$, unde $X=\{x_1,x_2\}$, $x_1 \neq x_2$ şi $\mathcal{T}=\{\emptyset, X, \{x_1\}\}$.

Un exemplu de spaţiu T_1 care nu este un spaţiu T_2 este spaţiul topologic $(X,\mathcal{T})$ unde X este o mulţime infinită şi $\mathcal{T}$ este topologia cofinită pe X [v.2.5,3)] .

2) Orice submulţime a unui spaţiu T_i (i=o,1,2) ce conţine cel puţin două elemente este un spaţiu T_i în topologia relativă. Cu alte cuvinte, axioma de separaţie T_i (i=o,1,2) este o proprietate ereditară.

3) Dacă X este un spatiu T_i şi X este homeomorf cu spaţiul topologic Y, atunci şi Y este un spaţiu T_i (i=o,1,2). Prin urmare, axioma de separaţie T_i este o proprietate topologică.

4) Orice spaţiu metric este un spaţiu Hausdorff. In particular, orice spaţiu vectorial normat este un spaţiu Hausdorff. In adevăr, dacă (M,ϱ) este un spaţiu metric şi $x_1,x_2 \in M$, $x_1 \neq x_2$, fie $r=\varrho(x_1,x_2) > o$. Dacă definim $D_j=B(x_j,r/2)$, j=1,2, atunci $x_j \in D_j$ şi $D_1 \cap D_2 = \emptyset$.

5) Orice sumă topologică de spaţii T_i este tot un spaţiu T_i (i=o,1,2).

6) Condiţia necesară şi suficientă ca un produs de spaţii topologice să fie un spaţiu T_i este ca fiecare factor să fie un spaţiu T_i (i=o,1,2). Prin urmare, axioma de separaţie T_i este

o proprietate multiplicativă ($i=0,1,2$). In adevăr, dacă $X=\prod_{t\in T} X_t$, ($T \neq \emptyset$), am văzut că X conţine, pentru fiecare indice $t\in T$, subspaţii homeomorfe cu X_t [v.4.2,6)]. Dacă X este un spaţiu T_i, aceste subspaţii vor fi T_i [v.observaţia 2) de mai sus], deci X_t vor fi T_i pentru fiecare $t\in T$ [v. observaţia 3) de mai sus]. Reciproc, să presupunem că toate spaţiile X_t ($T \neq \emptyset$) sînt T_i şi fie $f,g\in X$, $f \neq g$. Atunci există cel puţin un indice $t_0\in T$ astfel încît $f(t_0) \neq g(t_0)$. Să presupunem că ne situăm în cazul $i=2$, demonstraţia în cazurile $i=0,1$ fiind complet similară. Fie $D^1_{t_0}$, $D^2_{t_0}$ două mulţimi deschise disjuncte din X_{t_0} astfel încît $f(t_0)\in D^1_{t_0}$, $g(t_0)\in D^2_{t_0}$. Atunci $p^{-1}_{t_0}(D^1_{t_0})$ şi $p^{-1}_{t_0}(D^2_{t_0})$ sînt mulţimi deschise din X, $f\in p^{-1}_{t_0}(D^1_{t_0})$, $g\in p^{-1}_{t_0}(D^2_{t_0})$ şi $p^{-1}_{t_0}(D^1_{t_0}) \cap p^{-1}_{t_0}(D^2_{t_0}) = p^{-1}_{t_0}(D^1_{t_0} \cap D^2_{t_0}) = p^{-1}_{t_0}(\emptyset) = \emptyset$.

Să stabilim comportarea axiomelor de separaţie introduse mai sus la schimbarea structurii topologice. In cazul schimbării topologiei cu una mai fină, axiomele rămîn valabile şi în noua structură. Mai precis, are loc

5.3. Propoziţie: Dacă spaţiul topologic $(X,\mathcal{T})$ verifică una din axiomele T_0, T_1, T_2 şi $\mathcal{T}_1$ este o topologie pe X mai fină decît $\mathcal{T}$, atunci şi spaţiul topologic $(X,\mathcal{T}_1)$ o verifică.

Demonstraţia acestei afirmaţii este imediată şi o lăsăm în seama cititorului.

5.4. Observaţie. Celelalte axiome de separaţie T_3 şi T_4 pe care le vom defini mai jos se pot deteriora prin trecerea de la $\mathcal{T}$ la topologia mai fină $\mathcal{T}_1$.

Vom stabili mai departe cîteva proprietăţi importante ale spaţiilor topologice ce satisfac axioma de separaţie T_1 sau T_2.

5.5. Propoziţie. X este un spaţiu T_1 dacă şi numai dacă

pentru orice $x \in X$, $\{x\}$ este o submulţime închisă a lui X. In particular, dacă X este un spaţiu T_2, atunci pentru orice $x \in X$ $\{x\}$ este o submulţime închisă a lui X.

Demonstraţie. Presupunem că X este un spaţiu T_1. Fie $F = \{x_0\}$ şi să considerăm F'. Deoarece X satisface axioma de separaţie T_1, pentru fiecare $x \in F'$ există o mulţime deschisă D_x astfel încît $x_0 \bar{\in} D_x$, adică astfel încît $D_x \subset F'$. Prin urmare $F' = \bigcup_{x \in F'} D_x$ este deschisă în X [v.2.5,7)], adică F este închisă. Reciproc, să presupunem că $\{x\}$ este o submulţime închisă a lui X pentru orice $x \in X$. Fie $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$. Dacă definim $D_1 = \{x_2\}'$ şi $D_2 = \{x_1\}'$, atunci D_1, D_2 sînt mulţimi deschise din X, $x_1 \in D_1$, $x_2 \bar{\in} D_1$ şi $x_2 \in D_2$, $x_1 \bar{\in} D_1$. Deci X este un spaţiu T_1.

5.6. Corolar. Singura topologie ce satisface axioma de separaţie T_1 pe o mulţime finită ce conţine cel puţin două elemente este topologia discretă. In particular, singura topologie Hausdorff pe o mulţime finită ce conţine cel puţin două elemente este topologia discretă.

In adevăr, dacă X este o mulţime finită ce conţine cel puţin două elemente şi este dotată cu o topologie ce satisface axioma de separaţie T_1, atunci pentru orice $x \in X$, $\{x\}' = \bigcup_{\substack{y \neq x \\ y \in X}} \{y\}$ este închisă, deci $\{x\}$ este o mulţime deschisă. Dar în acest caz topologia dată pe X este în mod necesar topologia discretă.

Propoziţie. O condiţie necesară şi suficientă ca spaţiul topologic X să fie T_2 (Hausdorff) este ca diagonala Δ_X a produsului cartezian $X \times X$ să fie o submulţime închisă în raport cu topologia produs pe $X \times X$.

Demonstraţie. Să dovedim necesitatea. Fie $(x_1, x_2) \bar{\in} \Delta_X$, adică $x_1 \neq x_2$. Deoarece X este un spaţiu T_2, există mulţimile deschise D_1, D_2 astfel încît $x_j \in D_j$ $(j=1,2)$ şi $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Atunci $D_1 \times D_2$ este deschisă în $X \times X$ şi $(x_1, x_2) \in D_1 \times D_2$.

Să observăm că $D_1 \cap D_2 = \emptyset \iff (D_1 \times D_2) \cap \Delta_X = \emptyset \iff$ $C_{X\times X}(D_1 \times D_2) \supset \Delta_X$. Dar $C_{X\times X}(D_1 \times D_2)$ este închisă în $X \times X$ si $(x_1,x_2) \in C_{X\times X}(D_1 \times D_2)$. Deci $(x_1,x_2) \in \overline{\Delta}_X$, adică $\overline{\Delta}_X \subseteq \Delta_X$, ceea ce implică $\overline{\Delta}_X = \Delta_X$.

Reciproc, dacă Δ_X este închisă în $X \times X$, atunci pentru orice $(x_1,x_2) \in \Delta_X$, deci cu $x_1 \neq x_2$, $X \times X \setminus \Delta_X$ este o mulţime deschisă disjunctă de Δ_X ce conţine (x_1,x_2). Dar atunci $X \times X \setminus \Delta_X$ conţine o mulţime de forma $D_1 \times D_2$, unde D_1, D_2 sînt deschise în X şi $x_1 \in D_1$, $x_2 \in D_2$. Dar $D_1 \times D_2 \subset X\times X \setminus \Delta_X \iff$ $(D_1 \times D_2) \cap \Delta_X = \emptyset \iff D_1 \cap D_2 = \emptyset$, aşa încît X este un spaţiu T_2.

Q. E. D.

5.8. Corolar. Fie X un spaţiu topologic, Y un spaţiu topologic Hausdorff şi $f,g:X \longrightarrow Y$ aplicaţii continue. Atunci $M = \{ x \in X \mid f(x) = g(x) \}$ este închisă în X.

In adevăr, n-avem decît să observăm că aplicaţia $h:X \longrightarrow Y \times Y$, $h(x) = (f(x), g(x))$, $x \in X$, este continuă (v.4.3) şi că $M = h^{-1}(\Delta_Y)$; afirmaţia este atunci o consecinţă imediată a lui 2.50.

5.9. Corolar. Fie X un spaţiu topologic, Y un spaţiu topologic Hausdorff, $S \subset X$ astfel încît $\overline{S} = X$ şi $f,g:X \longrightarrow Y$ aplicaţii continue astfel încît $f|_S = g|_S$. Atunci $f=g$.

In adevăr, deoarece $h:X \longrightarrow Y \times Y$, $h(x)=(f(x), g(x))$, $x \in X$, este continuă (v.4.3), în baza lui 2.50 şi a ipotezei putem scrie $h(X) = h(\overline{S}) \subseteq \overline{h(S)} \subseteq \Delta_Y$, căci Δ_Y este închisă în $Y \times Y$. Dar incluziunea $h(X) \subseteq \Delta_Y$ implică $f(x)=g(x)$ pentru orice $x \in X$.

5.10. Propoziţie. Orice submulţime compactă a unui spa-

ţiu Hausdorff este închisă.

Demonstraţie. Fie X un spaţiu Hausdorff şi C o submulţime compactă a lui X. Dacă $C = \emptyset$ afirmaţia este dovedită. Putem deci presupune $C \neq \emptyset$. Pentru a arăta că C' este deschisă este suficient să dovedim că pentru fiecare $x \in \overline{C}$, există o mulţime deschisă D_x ce conţine x astfel încît $D_x \cap C = \emptyset$ [v.2.5.,7)]. Deoarece X este spaţiu Hausdorff, pentru $x \in \overline{C}$ fixat şi pentru fiecare $c \in C$ există mulţimi deschise disjuncte D_c şi U_c astfel încît $x \in D_c$ şi $c \in U_c$. Familia $\{U_c \cap C\}_{c \in C}$ este atunci o acoperire deschisă pentru C, aşa încît în baza compacităţii lui C, există o submulţime finită $A \subset C$ astfel încît $\bigcup_{c \in A} (U_c \cap C) = C$, de unde rezultă $C \subset \bigcup_{c \in A} U_c$. Fie $D_x = \bigcap_{c \in A} D_c$. Atunci D_x este deschisă, $x \in D_x$ şi $D_x \cap C \subset$ $\subset D_x \cap (\bigcup_{c \in A} U_c) = \emptyset$. Să justificăm ultima egalitate. Dacă am presupune, prin absurd, că există $y \in D_x \cap (\bigcup_{c \in A} U_c)$, atunci $y \in D_c$ pentru orice $c \in A$ şi $y \in U_{c_0}$ pentru un $c_0 \in A$, adică $y \in D_{c_0} \cap U_{c_0} = \emptyset$, ceea ce este imposibil.

Q. E. D.

5.11. Corolar. Orice submulţime compactă a unui spaţiu metric este închisă (v.şi 3.46). In particular, orice submulţime compactă a unui spaţiu vectorial normat este închisă.

Această afirmaţie este o consecinţă imediată a observaţiei 5.2,4).

5.12. Corolar. O submulţime a lui $\mathbb{R}^n$ este compactă dacă şi numai dacă ea este închisă şi mărginită. In particular, $\mathbb{R}^n$ cu topologia obişnuită nu este un spaţiu topologic compact, iar sfera unitate $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ este un spaţiu compact.

Demonstraţie. Fie A o submulţime compactă a lui $\mathbb{R}^n$. Atunci în baza lui 3.8,2), A este mărginită, iar în baza lui

5.11, A este închisă.

Reciproc, fie A o submulţime închisă şi mărginită a lui $\mathbb{R}^n$. Deoarece A este mărginită, A poate fi concepută ca o submulţime a unui n-paralelipiped drept C (v.4.9) din $\mathbb{R}^n$, care este compact (v.4.9). Deoarece C este o submulţime închisă din $\mathbb{R}^n$, orice submulţime din C ce este închisă în $\mathbb{R}^n$ este închisă şi în C (v.2.11). Aşadar A este o submulţime închisă a spaţiului compact C, deci A este un spaţiu compact (v.3.12). In particular, deoarece $\mathbb{R}^n$ nu este mărginit, $\mathbb{R}^n$ nu poate fi un spaţiu topologic compact. In sfîrşit, S^{n-1} este mărginită, căci $S^{n-1} \subset B(o,2)$, şi închisă, căci ea este preimaginea prin aplicaţia continuă normă $| \ | : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqslant o}$, $x \longmapsto |x|$, a mulţimii închise $\{1\}$ din $\mathbb{R}$.

Q. E. D.

Aplicînd cele stabilite la 5.12 să arătăm că intervalele $(-1,1)$ şi $[-1,1]$ nu pot fi homeomorfe. In adevăr, dacă ele ar fi homeomorfe, intervalul $(-1,1)$ ar fi compact (v.3.16), ceea ce este imposibil căci $(-1,1)$ nu este o submulţime închisă a lui $\mathbb{R}$ cu topologia uzuală.

5.13. Observaţie. Corolarul 5.12 afirmă în esenţă că o submulţime a unui spaţiu vectorial normat real finit dimensional este compactă dacă şi numai dacă ea este închisă şi mărginită.

Dacă X,Y sînt spaţii vectoriale normate, atunci mulţimea L(X,Y) a aplicaţiilor liniare continue de la X în Y este tot un spaţiu vectorial normat în raport cu norma :

$$\| f \| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| \text{ , unde } f \in L(X,Y), \text{ v.[10] .}$$

Să presupunem acum că X şi Y sînt spaţii vectoriale euclidiene reale. Reamintim că o aplicaţie $f: X \longrightarrow Y$ se numeşte ortogonală dacă $f^* \circ f = 1_X$, unde $f^*: Y \longrightarrow X$ este adjunctul euclidian al lui f. Condiţia $f^* \circ f = 1_X$ este echivalentă cu condiţia

$|f(x)|=|x|$, pentru orice $x\in X$, unde $|\,|:X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ notează norma dedusă din produsul scalar definit pe X. Fie $O(X,Y)$ mulţimea aplicaţiilor ortogonale de la X în Y. In cazul cînd $X=Y=\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ fiind dotat cu produsul scalar canonic, mulţimea $O(X,Y)$ se notează cu $O(n)$ şi poate fi concepută ca o submulţime a lui $\mathbb{R}^{n^2}$. In raport cu compunerea aplicaţiilor, $O(n)$ formează un grup numit grupul ortogonal al spaţiului aritmetic euclidian $\mathbb{R}^n$.

5.14. Corolar. Dacă X,Y sînt spaţii vectoriale euclidiene reale finit dimensionale, atunci $O(X,Y)$ este o submulţime compactă a spaţiului vectorial normat finit dimensional $L(X,Y)$. In particular, $O(n)$ cu topologia indusă de $\mathbb{R}^{n^2}$ este un spaţiu topologic compact.

Demonstraţie. Deoarece aplicaţia $\varphi : L(X,Y) \longrightarrow L(X,X)$, $\varphi(f)=f^*\circ f$, este continuă şi $O(X,Y)=\{f\in L(X,Y) \mid f^*\circ f=1_X\}=\varphi^{-1}(\{1_X\})$, rezultă că $O(X,Y)$ este o submulţime închisă a lui $L(X,Y)$. Pe de altă parte, oricare ar fi $f\in O(X,Y)$, $\|f\|=1$, adică $O(X,Y)\subset B(o,2)$ [= celula deschisă cu centrul în 0 şi raza 2 a spaţiului $L(X,Y)$] , aşa încît $O(X,Y)$ este o submulţime mărginită a lui $L(X,Y)$. Corolarul este atunci o consecinţă imediată a observaţiei 5.13.

Q. E. D.

5.15. Corolar. Fie X un spaţiu topologic compact, Y un spaţiu topologic Hausdorff şi $f:X\to Y$ o aplicaţie continuă. Atunci f este o aplicaţie închisă şi proprie.

In adevăr, dacă F este o submulţime închisă din X, atunci F este o submulţime compactă a lui X (v.3.12) aşa încît $f(F)$ este o submulţime compactă a lui Y (v.3.18). In baza lui 5.10, $f(F)$ va fi atunci o submulţime închisă din Y. Dacă K este o submulţime compactă a lui Y, K este o submulţime închi-

să a lui Y (v.5.10), aşa încît $f^{-1}(K)$ este o submulţime închisă a lui X (v.2.50). Dar atunci $f^{-1}(K)$ este o submulţime compactă a lui X (v.3.12).

5.16. Corolar. Fie X un spaţiu topologic compact şi Y un spaţiu Hausdorff. Atunci orice bijecţie continuă $f:X \longrightarrow Y$ este un homeomorfism.

In adevăr, aplicaţia $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ este continuă, căci aplicaţia $f:X \longrightarrow Y$ este închisă (v.5.15).

5.17. Observaţii. 1) In baza ipotezelor corolarului 5.16. rezultă că şi spaţiul topologic Y este compact (v.3.16) . Mai mult, dacă $f:X \longrightarrow Y$ este un homeomorfism , atunci şi X este un spaţiu Hausdorff [v.5.2.3)] .

2. Ambele ipoteze din corolarul 5.16 sînt necesare, aşa după cum rezultă din următoarele două exemple. Astfel, dacă $X = \mathbb{R}$ este dotat cu topologia discretă (în acest caz X nu este un spaţiu compact) şi $Y = X = \mathbb{R}$ este dotat cu topologia obişnuită (în acest caz Y este un spaţiu Hausdorff), bijecţia continuă $1_X: X \longrightarrow X$ nu este un homeomorfism . Pe de altă parte, dacă considerăm $X = \{ x_1, x_2 \}$, $x_1 \neq x_2$, dotat cu topologia discretă (X este atunci un spaţiu compact) şi $Y=X$ cu topologia $\mathcal{T} = \{ \emptyset , X, \{x_1\} \}$ [în acest caz Y nu este un spaţiu Hausdorff, v.şi 5.2.1)] , bijecţia continuă $1_X: X \longrightarrow X$ nu este un homeomorfism.

5.18. Corolar. Fie X un spaţiu Hausdorff şi Y un spaţiu topologic compact. Atunci orice aplicaţie proprie $f:X \longrightarrow Y$ este continuă.

In adevăr, dacă F este o submulţime închisă a lui Y, atunci F este o submulţime compactă a lui Y (v.3.12) aşa încît - deoarece f este proprie - $f^{-1}(F)$ este o submulţime compactă a lui X, deci $f^{-1}(F)$ este o submulţime închisă a lui X (v.5.1o)

Ținînd seama de observația 3.26, de demonstrația implicației (d) $\Longrightarrow$ (b) din 3.25 și de corolarul 5.18 se obține următorul rezultat.

5.19. Corolar. (G.T. Whyburn) Următoarele patru proprietăți ale unui spațiu topologic Y sînt echivalente:

(a) Orice aplicație proprie surjectivă a unui spațiu Hausdorff în Y este închisă.

(b) Orice aplicație proprie a unui spațiu Hausdorff în Y este închisă.

(c) Orice aplicație proprie injectivă a unui spațiu Hausdorff în Y este închisă.

(d) Orice submulțime compact închisă a lui Y este închisă.

5.20. Definiție. Un spațiu Hausdorff se numește k-spațiu dacă orice mulțime compact închisă din spațiu este închisă.

De exemplu, un spațiu metric este un k-spațiu. Mai general, se poate arăta că un spațiu Hausdorff ce satisface prima axiomă de numărabilitate este un k-spațiu , v. [18] .

5.21. Corolar. Dacă Y este un k-spațiu, atunci orice aplicație proprie a unui spațiu Hausdorff în Y este închisă.

In cursul demonstrației propoziției 5.10 am arătat că dacă C este o submulțime compactă a unui spațiu Hausdorff X și dacă $x \in C$, atunci există mulțimi deschise disjuncte D_1 și D_2 astfel încît $x \in D_1$ și $C \subset D_2$, anume $D_1 = D_x$ și $D_2 = \bigcup_{c \in A} U_c$. De fapt putem dovedi ceva mai mult și anume următorul rezultat.

5.22. Propoziție. Dacă C_1 și C_2 sînt submulțimi compacte disjuncte ale spațiului Hausdorff X, atunci există mulțimile deschise disjuncte D_j astfel încît $C_j \subset D_j$ $(j=1,2)$.

Demonstrație. In baza observației ce precede această propoziție, pentru fiecare $x \in C_1$ există mulțimile deschise disjunc-

te D_x şi V_x astfel încît $x \in D_x$ şi $C_2 \subset V_x$. Familia $\{D_x \cap C_1\}_{x \in C_1}$ este o acoperire deschisă a lui C_1. Deoarece C_1 este compactă, există o submulţime finită $A_1 \subset C_1$ astfel încît $\{D_x \cap C_1\}_{x \in A_1}$ acoperă C_1, adică $C_1 = \bigcup_{x \in A_1} (D_x \cap C_1)$, de unde rezultă $C_1 \subset \bigcup_{x \in A_1} D_x$. Fie $D_1 = \bigcup_{x \in A_1} D_x$ şi $D_2 = \bigcap_{x \in A_1} V_x$. Atunci $C_2 \subset D_2$, căci $C_2 \subset V_x$ pentru fiecare $x \in C_1$ şi $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, căci $D_x \cap V_x = \emptyset$ pentru fiecare $x \in C_1$.

Q. E. D.

5.23. Corolar. Fie X un spaţiu compact Hausdorff şi F_1, F_2 submulţimi închise disjuncte din X. Atunci există mulţimi deschise disjuncte D_j astfel încît $F_j \subset D_j$ $(j=1,2)$.

In adevăr, această afirmaţie este o consecinţă imediată a propoziţiilor 3.12 şi 5.22.

5.24. Observaţie. Un spaţiu topologic cît obţinut dintr-un spaţiu Hausdorff nu este în mod necesar un spaţiu Hausdorff. De exemplu, fie $X = \{-1,1\} \times (-1,1)$ cu topologia indusă de $\mathbb{R}^2$ şi R următoarea relaţie de echivalenţă pe X: $(u,v)R(u_1,v_1)$ dacă şi numai dacă $u=u_1$ şi $v=v_1$, sau $u, u_1 = \pm 1$ şi $v=v_1 \in (-1,0)$. Prin urmare, pentru orice $x \in (-1,0)$, $(-1,x)R(1,x)$. Fie $q: X \longrightarrow X/R$ proiecţia canonică corespunzătoare şi X/R dotat cu topologia cît. Atunci $[(-1,0)]_R \neq [(1,0)]_R \in X/R$. Dar, deoarece orice mulţime deschisă din $(-1,1)$ ce conţine pe 0 include ca submulţime un interval deschis $(-\delta, \delta)$, unde $0 < \delta \leqslant 1$, orice două mulţimi deschise din X/R ce conţin pe $[(-1,0)]_R$ şi respectiv $[(1,0)]_R$ se intersectează. In acelaşi timp, acest exemplu arată că un spaţiu topologic cît obţinut dintr-un spaţiu metric nu este în mod necesar un spaţiu metrizabil.

5.25. Definiţie. Relaţia de echivalenţă R pe spaţiul topologic X se numeşte separată Hausdorff dacă spaţiul topologic cît X/R este un spaţiu Hausdorff.

5.26. Propoziţie. Dacă relaţia de echivalenţă R pe spaţiul topologic X este separată Hausdorff, atunci graficul ei $\Gamma = \{ (x_1, x_2) \in X \times X \mid x_1 R x_2 \}$ (ce se identifică cu R, v.observaţia ce succede definiţiei 1.12) este o submulţime închisă din $X \times X$.

Demonstraţie. Dacă X/R este spaţiu Hausdorff, diagonala $\Delta_{X/R}$ este o submulţime închisă în raport cu topologia produs pe $X/R \times X/R$ (v.5.7) şi în consecinţă $\Gamma = (q \times q)^{-1}(\Delta_{X/R})$ este o submulţime închisă din $X \times X$, căci aplicaţia $q \times q$ este continuă (v.4.5).

Q. E. D.

5.27. Propoziţie. Dacă relaţia de echivalenţă R pe X este deschisă [v.2.67,3)] şi graficul ei Γ este o submulţime închisă din $X \times X$, atunci R este separată Hausdorff.

Demonstraţie. Dacă $u_1 = q(x_1)$ şi $u_2 = q(x_2)$ sînt din X/R şi $u_1 \neq u_2$, atunci în mod necesar $(x_1, x_2) \in \Gamma$. Deoarece mulţimea $X \times X \setminus \Gamma$ este deschisă şi $(x_1, x_2) \in X \times X \setminus \Gamma$, există mulţimile deschise D_1 şi D_2 în X astfel încît $x_1 \in D_1$, $x_2 \in D_2$ şi $D_1 \times D_2 \subset X \times X \setminus \Gamma$. Deoarece q este o aplicaţie deschisă, mulţimile $q(D_1)$ si $q(D_2)$ sînt deschise în X/R. Pe de altă parte, $u_1 = q(x_1) \in q(D_1)$ şi $u_2 = q(x_2) \in q(D_2)$. In sfîrşit, să observăm că $q(D_1) \cap q(D_2) = \emptyset$. In adevăr, dacă $u \in q(D_1) \cap q(D_2)$ atunci există $x \in D_1$ şi $y \in D_2$ astfel încît $u = q(x) = q(y)$, deci xRy. Prin urmare, $(x,y) \in (D_1 \times D_2) \cap \Gamma$, ceea ce este imposibil căci $(D_1 \times D_2) \cap \Gamma = \emptyset$.

Q. E. D.

5.28. Teoremă. Dacă X este un spaţiu compact şi Hausdorff , atunci următoarele proprietăţi sînt echivalente:

(a) R este închisă ;

(b) R este separată Hausdorff ;

(c) Graficul Γ al lui R este o submulţime închisă din X x X.

Demonstraţie. Să dovedim că (a) $\Longrightarrow$ (b). Fie u_1 şi u_2 două puncte distincte din X/R. Atunci există $x_1, x_2 \in X, (x_1, x_2) \in \Gamma$ astfel încît $u_1 = q(x_1)$, $u_2 = q(x_2)$. Deoarece X este spaţiu Hausdorff, mulţimile $\{ x_1 \}$ şi $\{ x_2 \}$ sînt închise în X [v.5.2,1) şi 5.5] , asa încît mulţimile $q^{-1}(u_1) = q^{-1}(q(x_1))$ şi $q^{-1}(u_2) = q^{-1}(q(x_2))$, fiind saturatele unor mulţimi închise, vor fi închise în X [v.2.67,3)] . Pe de altă parte, mulţimile $q^{-1}(u_1)$ şi $q^{-1}(u_2)$ sînt disjuncte, aşa încît există mulţimile deschise disjuncte D_1 şi D_2 în X cu proprietatea $q^{-1}(u_i) \subset D_i$, i=1,2 (v.5.23). Complementara $F_i = X \setminus D_i$ este o mulţime închisă din X, aşa încît saturata $q^{-1}(q(F_i))$ a acestei mulţimi este o mulţime închisă [v.2.67,3)] ce nu intersectează mulţimea $q^{-1}(u_i)$, i=1,2. In adevăr, mulţimea deschisă $X \setminus q^{-1}(u_i)$ este saturată , căci ea se scrie evident ca o uniune de clase de echivalenţă în raport cu R şi conţine mulţimea F_i, adică $X \setminus q^{-1}(u_i) \supseteq F_i$, de unde rezultă

$$X \setminus q^{-1}(u_i) = q^{-1}(q(X \setminus q^{-1}(u_i))) \supseteq q^{-1}(q(F_i))$$

[v.1.33,5) şi 1.29,(1) şi (2)] , adică $X \setminus q^{-1}(u_i) \supseteq q^{-1}(q(F_i))$ ceea ce implică $q^{-1}(u_i) \cap q^{-1}(q(F_i)) = \emptyset$. Mulţimea $\tilde{D}_i = X \setminus q^{-1}(q(F_i))$ este deci deschisă, saturată şi conţine pe $q^{-1}(u_i)$. Pe de altă parte, deoarece

$$X \setminus D_i = F_i \subseteq q^{-1}(q(F_i)) ,$$

rezultă $\tilde{D}_i = X \setminus q^{-1}(q(F_i)) \subseteq D_i$, adică mulțimile saturate $\tilde{D}_1$ și $\tilde{D}_2$ sînt disjuncte, căci $\tilde{D}_1 \cap \tilde{D}_2 \subseteq D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Prin urmare $V_1 = q(\tilde{D}_1)$ și $V_2 = q(\tilde{D}_2)$ sînt mulțimi deschise disjuncte astfel încît $u_1 \in V_1$ și $u_2 \in V_2$.

Implicația (b) $\Longrightarrow$ (c) este de fapt afirmația conținută în 5.26.

In sfîrșit, să arătăm că (c) $\Longrightarrow$ (a). Fie F o mulțime închisă din X și fie $q^{-1}(q(F))$ saturata lui F. Atunci $q^{-1}(q(F)) = p_2((F \times X) \cap \Gamma)$, unde p_2 notează a doua proiecție canonică a lui $X \times X$ pe X. Deoarece $F \times X$ și Γ sînt submulțimi închise din $X \times X$, $(F \times X) \cap \Gamma$ este o submulțime închisă din $X \times X$, deci un compact, așa încît $p_2((F \times X) \cap \Gamma) = q^{-1}(q(F))$ este un compact (v.3.18) din spațiul Hausdorff X, deci o submulțime închisă din X (v.5.10).

Q. E. D.

Propoziția 5.22 arată că într-un spațiu Hausdorff există suficiente mulțimi deschise pentru a separa mulțimi compacte. Uneori este necesar să putem separa mulțimi închise, ceea ce pretinde o axiomă mai tare.

5.29. <u>Definiție.</u> Fie X un spațiu topologic ce conține cel puțin două puncte.

Se zice că X satisface <u>axioma de separație</u> T_3 sau că X este un <u>spațiu regulat</u> dacă sînt îndeplinite următoarele două condiții:

(1_R) X este un spațiu T_1

și

(2_R) pentru orice mulțime închisă F din X și orice $x \in \overline{F}$ $(x \in X)$, există mulțimi deschise disjuncte D_1 și D_2 astfel încît $x \in D_1$ și $F \subset D_2$.

Se zice că X satisface <u>axioma de separaţie</u> T_4 sau că X este un <u>spaţiu normal</u> dacă sînt îndeplinite următoarele două condiţii :

(1_N) X este un spaţiu T_1

şi

(2_N) pentru orice pereche F_1, F_2 de mulţimi închise disjuncte din X, există mulţimi deschise disjuncte D_1 şi D_2 astfel încît $D_j \supset F_j$ $(j=1,2)$.

5.30. <u>Observaţii</u>. 1) Orice spaţiu T_k $(k=1,2,3,4)$ este şi un spaţiu T_j, unde $0 \leqslant j < k$.

Să construim acum un exemplu de spaţiu Hausdorff care nu este un spaţiu regulat. Fie mulţimea $X = \{ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geqslant 0 \}$, adică X este semiplanul superior "închis" din $\mathbb{R}^2$. Vom defini o topologie pe X dînd o bază $\mathcal{B}$ pentru această topologie. Fie $X_1 = \{ (x_1,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in \mathbb{R} \}$ şi $X_+ = X \setminus X_1$, adică X_+ este semiplanul superior "deschis" din $\mathbb{R}^2$.

Fie

$$\mathcal{B}_1 = \{ B((x_1,x_2),r) \mid (x_1,x_2) \in X_+ \text{ şi } r < x_2 \}$$

şi

$$\mathcal{B}_2 = \{ B((x_1,0), r) \cap X_+) \cup \{(x_1,0)\} \mid x_1 \in \mathbb{R} \},$$

unde celulele $B((x_1,x_2),r)$ sînt definite relativ la metrica uzuală ϱ_1 pe $\mathbb{R}^2$ [v.exemplul ce precede observaţia 2.3]. Dacă notăm $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, atunci $\mathcal{B}$ este o bază pentru o topologie pe X. Inzestrat cu topologia generată de $\mathcal{B}$, X este un spaţiu Hausdorff. In raport cu această topologie, mulţimea $X_1 \setminus \{(0,0)\}$ este închisă în X, deoarece complementara sa $X_+ \cup \{(0,0)\}$ este deschisă. Să observăm că mulţimea închisă $X_1 \setminus \{(0,0)\}$ şi punctul $(0,0)$ nu pot fi separate prin mulţimi deschise: dacă D_1 este o mulţime deschisă astfel încît $(0,0) \in D_1$, atunci D_1 va conţi

ne un element al bazei $\mathcal{B}$ de forma $(B((o,o),r) \cap X_+) \cup \{(o,o)\}$, unde $r > o$ este un număr real. In acest caz orice mulţime deschisă ce conţine punctul $(r/2,o)$ va intersecta mulţimea D_1. Deci X nu este un spaţiu regulat.

In sfîrşit, să considerăm un exemplu de spaţiu regulat ce nu este un spaţiu normal. Fie din nou $X=\{(x_1,x_2)\in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geqslant o\}$ semiplanul superior "închis" din $\mathbb{R}^2$ şi $X_+=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid x_2>o\}$ semiplanul superior "deschis" din $\mathbb{R}^2$. Dacă notăm

$$\mathcal{B}_1=\{B((x_1,x_2),r) \mid (x_1,x_2)\in X_+ \text{ şi } r<x_2\}$$

şi

$$\mathcal{B}_2=\{B((x_1,x_2),x_2)\cup\{(x_1,o)\} \mid (x_1,x_2)\in X_+\},$$

atunci $\mathcal{B}=\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ este o bază pentru o topologie pe X. Inzestrat cu topologia generată de $\mathcal{B}$, X este un spaţiu regulat. In adevăr, fie F o submulţime închisă din X şi $(x_1,x_2)\in F$. Dacă $x_2>o$, atunci există o celulă $B((x_1,x_2),\varepsilon)$, $\varepsilon<x_2$, conţinută în mulţimea deschisă F' şi mulţimile deschise $B((x_1,x_2),\varepsilon/2)$ şi $C_X(B((x_1,x_2),\varepsilon/2))$ separă (x_1,x_2) şi F. Dacă $x_2=o$, atunci există o mulţime deschisă $D\in\mathcal{B}_2$ astfel încît $(x_1,o)\in D$ şi $D\subset F'$, adică $D\cap F=\emptyset$. Fie D_1 o mulţime deschisă din $\mathcal{B}_2$ ce conţine punctul (x_1,o) şi astfel încît $\overline{D}_1\subset D$. Atunci fiecare punct din D' (deci şi din F) este conţinut într-o mulţime deschisă din baza $\mathcal{B}$ ce este disjunctă de D_1. Fie D_2 uniunea mulţimilor de acest tip ce conţin toate punctele lui F. Atunci D_1 şi D_2 separă (x_1,o) şi F. Să arătăm acum că spaţiul topologic X nu este normal. Să observăm întîi că spaţiul topologic X induce pe submulţimea $X_1=\{(x_1,o) \mid x_1\in\mathbb{R}\}$ topologia discretă. In adevăr, pentru fiecare $(x_1,o)\in X_1$, submulţimea $X_1\setminus\{(x_1,o)\}$ este închisă în X, căci complementara sa este o

uniune de mulţimi din $\mathcal{B}$. Dar pentru orice submulţime $A \subset X_1$ putem scrie $A = \bigcap_{(x_1,0)\in X_1\setminus A} (X_1 \setminus \{(x_1,0)\})$, de unde rezultă că orice submulţime a lui X_1 este închisă în X. In particular, submulţimile $F_1 = \{(x_1,0) \mid x_1 \in \mathbb{Q}\}$ şi $F_2 = \{(x_1,0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\}$ vor fi închise în X. Vom arăta că nu putem găsi mulţimi deschise disjuncte D_1 şi D_2 astfel încît $F_1 \subset D_1$ şi $F_2 \subset D_2$. Procedăm prin reducere la absurd. Să presupunem deci că există asemenea mulţimi deschise D_1 şi D_2. Atunci pentru fiecare $(x_1,0) \in F_j$ $(j=1,2)$, există o mulţime deschisă $D_{(x_1,0)} \in \mathcal{B}_2$ astfel încît $D_{(x_1,0)} \subset D_j$ şi $(x_1,0) \in D_{(x_1,0)} \cdot D_{(x_1,0)}$ este uniunea dintre mulţimea $\{(x_1,0)\}$ şi o celulă din semiplanul superior a lui $\mathbb{R}^2$ tangentă în $(x_1,0)$. Vom defini atunci raza lui $D_{(x_1,0)}$ ca fiind raza acestei celule. Să observăm că $\bigcup_{(x_1,0)\in F_1} D_{(x_1,0)} \subset D_1$ şi $\bigcup_{(x_1,0)\in F_2} D_{(x_1,0)} \subset D_2$ sînt mulţimi deschise disjuncte ce conţin respectiv pe F_1 şi F_2. Fie $f: X_1 \longrightarrow X_1$ aplicaţia definită prin $f(x_1,0) = (\text{raza lui } D_{(x_1,0)}, 0)$. Pentru fiecare număr natural $n \geqslant 1$, fie

$$T_n = \left\{(x_1,0) \in F_2) \mid f(x_1,0) \geqslant \frac{1}{n}\right\}.$$

Dacă $(x_1,0) \in F_2$, atunci există un număr natural $n \geqslant 1$ astfel încît $f(x_1,0) \geqslant \frac{1}{n}$, ceea ce implică $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n = F_2$. Mai mult, putem scrie:

$$X_1 = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n\right) \cup \left(\bigcup_{(x_1,0)\in F_1} \{(x_1,0)\}\right),$$

adică X_1 poate fi exprimată sub forma unei uniuni numărabile de mulţimi. Pe de altă parte, să observăm că X_1 poate fi identificată cu mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale, F_1 cu $\mathbb{Q}$ şi F_2 cu $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, aşa încît X_1 poate fi conceput ca un spaţiu metric complet. Mulţimile punctuale din X_1 de forma $\{(x_1,0)\}$ sînt rare în raport cu această topologie de spaţiu metric complet pe X_1,

aşa încît există un număr natural n cu proprietatea că $\bar{T}_n$ conţine o mulţime deschisă din X_1 (v.3.49). In particular, $\bar{T}_n$ va conţine o submulţime I ce poate fi identificată cu un interval deschis de pe axa reală. Fie $(x,o) \in I$, $x \in Q$. Deoarece $(x,o) \in \bar{T}_n$, există un şir $\{ (x_k,o) \} \subset T_n$ ce converge către (x,o) (v.3.30). Dar $(\bigcup_{k=1}^{\infty} D_{(x_k,o)}) \cap D_{(x,o)} \subset D_1 \cap D_2 = \emptyset$, ceea ce este imposibil, căci fiecare mulţime $D_{(x_k,o)}$ are raza $\geqslant \frac{1}{n}$, adică $f_{(x_k,o)}$ nu tinde la zero atunci cînd $k \longrightarrow \infty$ şi $(x_k,o) \longrightarrow (x,o)$.

2) Orice subspaţiu a unui spaţiu topologic regulat ce conţine cel puţin două elemente este regulat. Cu alte cuvinte, axioma de separaţie T_3 este o proprietate ereditară. In adevăr, fie A o submulţime formată din cel puţin două elemente a spaţiului topologic regulat X şi dotată cu topologia relativă, $x \in A$, P o submulţime închisă din A astfel încît $x \notin P$. Atunci în baza lui 5.2,2), A este un spaţiu T_1. In baza ipotezei există o mulţime închisă F în X astfel încît $P = A \cap F$. Să observăm că $x \notin F$, căci în caz contrar $x \in P$, aşa încît există mulţimile deschise disjuncte D_1 şi D_2 din X cu proprietăţile : $x \in D_1$ şi $F \subset D_2$. Dacă definim $U_1 = A \cap D_1$ şi $U_2 = A \cap D_2$, atunci mulţimile U_1 şi U_2 sînt deschise în A, disjuncte şi $x \in U_1$, $P \subset U_2$.

O submulţime a unui spaţiu topologic normal ce conţine cel puţin două elemente nu este în mod necesar un spaţiu normal în topologia relativă (v. [18] , Ex. F, p.132). Cu alte cuvinte, axioma de separaţie T_4 nu este o proprietate ereditară. In acest sens propunem cititorului să motiveze de ce un raţionament similar cu cel aplicat în demonstraţia de mai sus, nu mai este valabil şi în acest caz. In schimb, cititorul poate verifica

imediat că orice mulțime închisă, ce conține cel puțin două elemente, dintr-un spațiu topologic normal este un spațiu topologic normal în topologia relativă. Spațiile normale cu proprietatea că orice subspațiu al lor este normal se numesc complet normale.

3) Axiomele de separație T_3 și T_4 sînt proprietăți topologice.

4) Suma oricărei familii de spații topologice regulate (resp. normale) este un spațiu topologic regulat (resp.normal).

5) In general, un produs cartezian de două spații normale nu este normal (v. [29] ,p.98) . Cu alte cuvinte, proprietatea unui spațiu topologic de a fi normal nu este în general multiplicativă (v.4.15).

6) Orice spațiu Hausdorff compact este normal. Acest fapt este o consecință imediată a corolarului 5.23.

7) Condiția (2_R) din definiția spațiului regulat este echivalentă și cu următoarea condiție:

$(2'_R)$ Pentru orice punct $x \in X$ și orice mulțime deschisă U din X ce conține pe x, există o mulțime deschisă D în X astfel încît $x \in D$ și $\overline{D} \subset U$.

Demonstrația echivalenței $(2_R) \Longleftrightarrow (2'_R)$ este complet similară cu cea dată pentru echivalența conținută în observația 8) de mai jos. Pentru aceasta, în loc de F și respectiv F_1 n-avem decît să luăm în considerare mulțimea $\{ x \}$.

Condiția (2_R) este echivalentă și cu următoarea condiție, aparent mai generală:

$(2''_R)$ Pentru orice mulțime închisă F din X și orice mulțime compactă C din X astfel încît $F \cap C = \emptyset$, există mulțimi deschise disjuncte D_1 și D_2 astfel încît $C \subset D_1$ și $F \subset D_2$.

In adevăr, implicaţia $(2''_R) \Longrightarrow (2_R)$ este imediată căci pentru orice $x \in X$, mulţimea $\{x\}$ este compactă. Să demonstrăm acum implicaţia $(2_R) \Longrightarrow (2''_R)$. Fie deci F o mulţime închisă şi C o mulţime compactă astfel încît $F \cap C = \emptyset$. Dacă $C = \emptyset$, n-avem decît să luăm $D_1 = \emptyset$ şi $D_2 = X$. Să presupunem deci $C \neq \emptyset$. Pentru fiecare punct $c \in C$, există mulţimile deschise disjuncte $D_{1,c}$ şi $D_{2,c}$ astfel încît $c \in D_{1,c}$ şi $F \subset D_{2,c}$. Familia $\{D_{1,c} \cap C\}_{c \in C}$ este atunci o acoperire deschisă pentru C. Deoarece C este compactă, există o submulţime finită $C_1 \subseteq C$ astfel încît $\bigcup_{c \in C_1} (D_{1,c} \cap C) = C$. Fie $D_1 = \bigcup_{c \in C_1} D_{1,c}$ şi $D_2 = \bigcap_{c \in C_1} D_{2,c}$. Atunci D_1 şi D_2 sînt mulţimi deschise, $C \subset D_1$, $F \subset D_2$ şi $D_1 \cap D_2 \subset (\bigcup_{c \in C_1} D_{1,c}) \cap D_2 = \emptyset$, căci în caz contrar, dacă $(\bigcup_{c \in C_1} D_{1,c}) \cap D_2 \neq \emptyset$, există $u \in (\bigcup_{c \in C_1} D_{1,c}) \cap D_2$, ceea ce implică $u \in D_{1,c_0}$ pentru cel puţin un $c_0 \in C_1$ şi $u \in D_{2,c}$, oricare ar fi $c \in C_1$, adică $u \in D_{1,c_0} \cap D_{2,c_0} = \emptyset$, ceea ce este absurd.

In sfîrşit, să mai observăm că $(2'_R)$ este echivalentă şi cu următoarea condiţie, aparent mai generală:

$(2'''_R)$ Pentru orice mulţime compactă $C \subset X$ şi orice mulţime deschisă U din X ce conţine pe C, există o mulţime deschisă D în X astfel încît $C \subset D$ şi $\overline{D} \subset U$.

Demonstraţia echivalenţei $(2'_R) \Longleftrightarrow (2'''_R)$ este imediată şi o lăsăm în seama cititorului. Prin urmare, $(2_R) \Longleftrightarrow (2'_R) \Longleftrightarrow (2''_R) \Longleftrightarrow (2'''_R)$.

8) Condiţia (2_N) din definiţia spaţiului normal este echivalentă şi cu următoarea condiţie :

$(2'_N)$ Pentru orice mulţime închisă F din X şi orice mulţime deschisă U din X ce conţine pe F, există o mulţime

deschisă D în X astfel încît $F \subset D$ şi $\bar{D} \subset U$.

In adevăr, să demonstrăm că $(2_N) \Longrightarrow (2'_N)$. Fie F o mulţime închisă din X şi U o mulţime deschisă din X ce conţine pe F. Atunci $F_2 = U'$ este o mulţime închisă disjunctă de F, deci există mulţimile deschise disjuncte D şi D_2 astfel încît $F \subset D$ şi $F_2 = U' \subset D_2$. In aceste condiţii $D \subset D'_2$, de unde rezultă $\bar{D} \subset \bar{D}'_2 = D'_2$, căci D'_2 este închisă. Dar din incluziunea $U' \subset D_2$ rezultă imediat $D'_2 \subset U$, aşa încît $\bar{D} \subset U$. Reciproc, să verificăm acum că $(2'_N) \Longrightarrow (2_N)$. Fie F_1, F_2 două mulţimi închise disjuncte din X. Atunci $U = F'_2$ este o mulţime deschisă ce conţine pe F_1, deci există o mulţime deschisă D_1 în X astfel încît $F_1 \subset D_1$ şi $\bar{D}_1 \subset U$. Prin urmare, D_1 şi $D_2 = C_X(\bar{D}_1)$ sînt mulţimi deschise disjuncte şi $F_2 = U' \subset (\bar{D}_1)' = D_2$.

Următoarele două propoziţii arată că mulţimile D_1 şi D_2 ce intervin în condiţia (2_R) şi respectiv (2_N) pot fi alese astfel încît frontierele lor să nu se intersecteze.

5.31. Propoziţie. Fie X un spaţiu topologic regulat. Dacă F este închisă în X şi $x \in F$, atunci există mulţimile deschise D_1 şi D_2 în X astfel încît $x \in D_1$, $F \subset D_2$ şi $\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2 = \emptyset$.

Demonstraţie. In baza definiţiei regularităţii, există mulţimile deschise disjuncte U_1 şi U_2 astfel încît $x \in U_1$ şi $F \subset U_2$. Pe de altă parte, ţinînd seama de observaţia 5.30,7) există o mulţime deschisă D_1 în X astfel încît $x \in D_1$ şi $\bar{D}_1 \subset U_1$. Fie $U_2 = D_2$. Atunci $\bar{D}_2 = \bar{U}_2 \subset \bar{U}'_1 = U'_1$, căci U'_1 este închisă, astfel încît

$$\emptyset \subset \bar{D}_1 \cap \bar{D}_2 \subset U_1 \cap U'_1 = \emptyset$$

Q. E. D.

5.32 Propoziţie. Fie X un spaţiu topologic normal. Dacă F_1 şi F_2 sînt submulţimi închise disjuncte ale lui X, atunci există mulţimile deschise D_1 şi D_2 în X astfel încît $F_1 \subset D_1$, $F_2 \subset D_2$ şi $\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2 = \emptyset$.

Demonstraţie. In baza definiţiei normalităţii există mulţimile deschise disjuncte U_1 şi U_2 astfel încît $F_1 \subset U_1$ şi $F_2 \subset U_2$. Pe de altă parte, ţinînd seama de observaţia 5.30,8), există mulţimile deschise D_1 şi D_2 astfel încît $F_1 \subset D_1$, $\bar{D}_1 \subset U_1$, $F_2 \subset D_2$, $\bar{D}_2 \subset U_2$. Dar atunci,

$$\emptyset \subset \bar{D}_1 \cap \bar{D}_2 \subset U_1 \cap U_2 = \emptyset .$$

Q. E. D.

5.33 Propoziţie. Dacă (M, ϱ) este un spaţiu metric, atunci M cu topologia canonică este un spaţiu normal.

Demonstraţie. Am văzut deja că dacă M este un spaţiu metric, atunci M cu topologia canonică este un spaţiu Hausdorff [v.5.2,4)], deci un spaţiu T_1 [v.5.2,1)]. Pentru orice submulţime S a lui M, să considerăm funcţia $\varrho_S : M \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ definită prin $\varrho_S(x) = \operatorname{Inf} \{ \varrho(x,s) \mid s \in S \}$, $x \in M$. Dacă submulţimea nevidă S este fixată, ϱ_S este o funcţie continuă pe M. In adevăr, din inegalitatea

$$\varrho(x,s) \leqslant \varrho(x,y) + \varrho(y,s)$$

valabilă pentru orice $s \in S$, $x,y \in M$, rezultă

$$\varrho_S(x) \leqslant \varrho(x,y) + \varrho(y,s)$$

şi prin urmare şi inegalitatea

$$\varrho_S(x) \leqslant \varrho(x,y) + \varrho_S(y).$$

Schimbînd acum rolurile lui x şi y obţinem inegalitatea

$$| \varphi_S(x) - \varphi_S(y) | \leq \varrho(x,y),$$

de unde continuitatea lui φ_S este imediată (v.3.32).

Fie F_1 și F_2 submulțimi închise disjuncte din M, $\varphi_1 = \varphi_{F_1}$, $\varphi_2 = \varphi_{F_2}$ și $D_1 = \{ x \in M \mid \varphi_1(x) - \varphi_2(x) < 0 \}$, $D_2 = \{ x \in M \mid \varphi_1(x) - \varphi_2(x) > 0 \}$. Atunci $D_1 \cap D_2 = \emptyset$.

Să arătăm că $F_1 \subset D_1$ și $F_2 \subset D_2$. Dacă $x \in F_1$, atunci $\varphi_1(x) = 0$. Pentru a dovedi că $x \in D_1$, trebuie să arătăm că $\varphi_2(x) > 0$. Dacă am presupunem prin absurd că $\varphi_2(x) = 0$, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $y \in F_2$ astfel încît $y \in B(x, \varepsilon)$. Dar atunci $x \in \overline{F}_2 = F_2$, ceea ce contrazice faptul că $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Deci $F_1 \subset D_1$. In mod similar se arată că $F_2 \subset D_2$. Rămîne acum doar să dovedim că D_1 și D_2 sînt mulțimi deschise. In acest sens n-avem decît să observăm că $D_1 = (\varphi_1 - \varphi_2)^{-1}(-\infty, 0)$ și $D_2 = (\varphi_1 - \varphi_2)^{-1}(0, +\infty)$.

Q. E. D.

5.34. Observație. Propoziția 5.33 admite o reciprocă ce se datorește lui P.Urysohn: orice spațiu normal cu baza numărabilă este homeomorf cu un spațiu metric, deci metrizabil (pentru detalii, v.5.64).

Axiome de separație și aplicații continue.

Dacă $(X, \mathcal{T})$ este spațiul topologic a cărei topologie este topologia trivială pe X [v.2.5,3)], atunci singurele funcții continue pe X cu valori reale sînt funcțiile constante. Pe de altă parte, dacă $(X, \mathcal{T})$ este spațiul topologic a cărei topologie $\mathcal{T}$ este topologia discretă pe X [v.2.5,3)], atunci orice funcție real-valuată $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ este evident continuă.

Dacă X este un spaţiu topologic astfel încît pentru orice pereche de puncte distincte x_1, x_2 din X, există o funcţie continuă $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea $f(x_1) \neq f(x_2)$, atunci X este Hausdorff. In adevăr, fie D_1 şi D_2 mulţimi deschise disjuncte din $\mathbb{R}$ cu proprietatea $f(x_1) \in D_1$ şi $f(x_2) \in D_2$. Atunci $x_j \in f^{-1}(D_j)$ $(j=1,2)$ şi $f^{-1}(D_1) \cap f^{-1}(D_2) = f^{-1}(D_1 \cap D_2) = \emptyset$. Astfel, se pare că existenţa funcţiilor continue cu valori reale neconstante pe un spaţiu topologic este legată de axioma de separaţie satisfăcută de spaţiu. Pentru ca pe un spaţiu topologic să existe funcţii continue cu valori reale neconstante trebuie să impunem deci axiome de separaţie, care după cum se va vedea vor fi destul de restrictive. De exemplu, axioma de separaţie T_3 nu ajunge: există spaţii regulate pe care singurele funcţii continue cu valori regulate sînt cele constante. Lema lui P.Urysohn şi observaţia ce-i succede caracterizează normalitatea în aceşti termeni.

5.35. Lema lui P.Urysohn. Fie F_0 şi F_1 submulţimi închise disjuncte ale spaţiului normal X. Atunci există o funcţie continuă $f: X \longrightarrow [0,1]$ astfel încît $f(x)=0$ pentru orice $x \in F_0$ şi $f(x)=1$ pentru orice $x \in F_1$.

Demonstraţia acestei afirmaţii poate fi găsită de exemplu în [8], pp.87-90.

5.36. Observaţii. 1) Reciproc, dacă spaţiul topologic X este un spaţiu T_1 şi are proprietatea că pentru fiecare pereche F_0, F_1 de mulţimi închise disjuncte există o funcţie continuă cu proprietăţile din Lema lui Urysohn, atunci X este normal.

In adevăr, fie $D_0 = f^{-1}([0, 1/2))$ şi $D_1 = f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$. Atunci D_0 şi D_1 sînt deschise în X, $F_0 \subset D_0$, $F_1 \subset D_1$ şi $D_0 \cap D_1 = \emptyset$.

2) In particular, ţinînd seama de 5.33, lema lui Urysohn este valabilă şi pentru cazul spaţiilor metrice. Dacă (M,ϱ) este un spaţiu metric, atunci drept $f:M \longrightarrow [0,1]$ poate fi luată funcţia $f(x) = \varrho_{F_0}(x) / \varrho_{F_0}(x) + \varrho_{F_1}(x)$, $x \in M$ (v.notaţiile din demonstraţia lui 5.33).

3) Pe orice spaţiu normal există funcţii continue cu valori reale neconstante.

In adevăr, dacă $x_0, x_1 \in X$, $x_0 \neq x_1$, atunci luînd $F_0 = \{ x_0 \}$, $F_1 = \{ x_1 \}$, în baza lemei lui Urysohn, există o funcţie continuă $f:X \longrightarrow [0,1]$ astfel încît $f(x_0)=0 \neq 1 = f(x_1)$

5.37. Corolar. Dacă F_0 şi F_1 sînt submulţimi închise disjuncte ale spaţiului normal X, atunci există o funcţie continuă $g:X \longrightarrow [a,b]$ astfel încît $g(F_0) = \{ a \}$ şi $g(F_1) = \{ b \}$.

In adevăr, fie $f:X \longrightarrow [0,1]$ funcţia dată de lema lui Urysohn. Definim atunci $g = h \circ f$, unde $h: [0,1] \longrightarrow [a,b]$ este dată prin $h(x) = a+(b-a)x$, $x \in [0,1]$.

5.38. Observaţii. 1) Lema lui P.Urysohn poate fi reformulată şi în termenii prelungirilor continui, după cum urmează. Fie X un spaţiu normal şi fie F_0 şi F_1 submulţimi închise disjuncte ale lui X. Dacă $X_1 = F_0 \cup F_1$ şi $g:X_1 \longrightarrow [0,1]$ este definită prin $g(F_0) = \{ 0 \}$, $g(F_1) = \{ 1 \}$, atunci există o prelungire continuă f a lui g definită pe tot spaţiul X. Să notăm că F_0 (resp.F_1) este atît deschisă cît şi închisă în X_1, aşa încît funcţia $g:X_1 \longrightarrow [0,1]$ este continuă (v.2.61).

2) In capitolul precedent (v.4.16) am stabilit, de asemenea o teoremă de prelungire a aplicaţiilor continue. In esenţă ea afirmă că orice familie de funcţii cu valori reale sau complexe continue şi mărginite pe un spaţiu topologic S poate fi prelungită la o familie de funcţii continue pe un spaţiu compact ce conţine pe S. De asemenea, sîntem convinşi că, cititorul a întîlnit deja şi alte

teoreme de prelungire cu păstrarea atît a opntinuităţii aplicaţiei cît şi eventual a altor caracteristici ale acesteia (liniaritatea, norma, etc) (pentru detalii v. de exemplu [10] ,p.13 şi p.69) Acest fapt nu trebuie însă să conducă la concluzia eronată după care problema prelungirii continue a unei aplicaţii continue admite totdeauna un răspuns afirmativ. Mai precis, dat subspaţiul X_1 al spaţiului topologic X, spaţiul topologic Y şi aplicaţia continuă $g:X_1 \longrightarrow Y$, în general nu există o prelungire continuă $f:X \longrightarrow Y$ a lui g. De exemplu, să considerăm discul unitate închis bidimensional $D^2=X$ a cărui frontieră este cercul unitate $S^1=X_1$ (v.şi consideraţiile ce preced definiţia 2.48). Luînd $Y=S^1$ şi considerînd drept $g:S^1 \longrightarrow S^1$ aplicaţia identitate, atunci nu există o prelungire continuă $f:D^2 \longrightarrow S^1$ a lui g. Justificarea intuitivă a non-existenţei unei asemenea aplicaţii f poate fi dată în felul următor. Să presupunem prin absurd, că ar exista o asemenea prelungire continuă f şi să considerăm comportarea lui f pe cercurile concentrice $S^1_r \subset D^2$ de rază r ($0 < r \leqslant 1$, $S^1_1=S^1$). Deoarece f este continuă, orice punct $x \in S^1_r$ pentru r apropiat de 1 trebuie să fie aplicat într-un punct apropiat de punctul $\frac{x}{r} \in S^1$. Prin urmare, dacă punctul x ar descrie cercul S^1_r, atunci $f(x)$ ar descrie cercul S^1, adică f aplică S^1_r pe S^1. Acelaşi tip de raţionament arată că f trebuie să aplice S^1_r pe S^1 pentru orice $r > 0$. Dar, pentru r suficient de mic, centrul $(0,0)$ al discului D^2 este apropiat de orice punct de pe S^1_r. Deci $f(0,0)$ trebuie să fie apropiat de orice punct din imaginea lui S^1_r prin f, adică $f(0,0)$ trebuie să fie apropiat de orice punct al lui S^1, ceea ce este evident imposibil.

Problema existenţei prelungirilor continue ale unei aplicaţii continue date este una din chestiunile fundamentale ale to-

pologiei. O bună parte din tehnicile ce apar în topologia algebrică sînt motivate tocmai de încercarea de a da un răspuns afirmativ sau negativ acestei probleme. Totuşi, pentru funcţii continue cu valori reale pe spaţii normale, are loc următoarea teoremă de prelungire care constituie o generalizare a lemei lui Urysohn [v.şi 5.38,1)] .

5.39. Teorema de prelungire a lui H.Tietze. Fie X_1 o submulţime închisă a spaţiului normal X şi fie $g:X_1 \longrightarrow [0,1]$ o aplicaţie continuă. Atunci g poate fi prelungită la o aplicaţie continuă $f:X \longrightarrow [0,1]$.

Demonstraţia acestei teoreme poate fi găsită de exemplu în [8] , pp.91-93.

Teorema lui H.Tietze se poate extinde imediat şi pentru aplicaţii continue cu valori într-un interval semideschis sau deschis de pe axa reală. Mai precis are loc următoarea

5.40. Propoziţie. Fie F o submulţime închisă a spaţiului normal X. Dacă $g:F \longrightarrow [a,b)$ este o aplicaţie continuă, atunci g poate fi prelungită la o aplicaţie continuă $f:X \longrightarrow [a,b)$. De asemenea, dacă $g:F \longrightarrow (a,b)$ este o aplicaţie continuă, atunci g poate fi prelungită la o aplicaţie continuă, $f:X \longrightarrow (a,b)$. In particular, afirmaţia este adevărată şi pentru cazul $a=-\infty$ şi $b=+\infty$, adică cînd $(a,b) = \mathbb{R}$.

Demonstraţie. Pentru a dovedi prima afirmaţie, fără a restrînge generalitatea putem presupune $a=0$ şi $b=1$ (v.demonstraţia lui 5.37). Fie deci $g:F \longrightarrow [0,1) \subset [0,1]$ o aplicaţie continuă. In baza teoremei lui Tietze, există o prelungire continuă $h:X \longrightarrow [0,1]$ a lui g. Dacă notăm $A = \{x \in X \mid h(x)=1\} = h^{-1}(\{1\})$, atunci A este o submulţime închisă a lui X şi $A \cap F = \emptyset$, căci g nu ia valoarea 1. Să definim pe mulţimea închisă $F \cup A$ din X aplicaţia $v:F \cup A \longrightarrow [0,1)$ prin

$$v(x) = \begin{cases} g(x) & , \quad x \in F \\ 0 & , \quad x \in A \end{cases} .$$

Ținînd seama de 2.61, v este continuă. Aplicînd din nou teorema lui Tietze, v admite o prelungire continuă $u : X \longrightarrow [0,1]$. Aplicația $f=\min(h,u)$ este continuă [v.exemplul 2.60,4)] . Dacă $x \in F$, atunci $g(x)=v(x)=u(x)$ și $g(x)=h(x)$, adică $g(x)=f(x)$. Pe de altă parte, să observăm că pentru orice $x \in X$, $f(x)<1$. In adevăr, $X=A \cup A'$ și pentru orice $x \in A$, $u(x)=v(x)=0$, adică $f(x)=0$, iar pentru orice $x \in A'$, $h(x) < 1$, adică $f(x)<1$. Prin urmare, $0 \leqslant f(x) < 1$ pentru orice $x \in X$.

Pentru a dovedi cea de-a doua afirmație, să presupunem că $a=-1$ și $b=1$. Ținînd seama de cele stabilite în exemplul 2.60,4), aplicațiile $g^+ : F \longrightarrow [0,1)$, $g^+(x)=\max(g(x),0)$, $x \in F$, $g^- : F \longrightarrow [0,1)$, $g^-(x)=\max(-g(x),0)$, $x \in F$, sînt continue. Pe de altă parte, să observăm că dacă notăm $B=\{ x \in F \mid g(x) > 0 \}$, $C=\{ x \in F \mid g(x)=0 \}$ și $D=\{ x \in F \mid g(x) < 0 \}$, atunci $g|_B = g^+|_B$, $g^-|_B = 0$, $g|_C = g^+|_C = g^-|_C = 0$ și $g|_D = -g^-|_D$, $g^+|_D = 0$, adică $g=g^+ - g^-$. In baza primei afirmații ce a fost deja dovedită, g^+ (resp. g^-) posedă o prelungire continuă $f^+ : X \longrightarrow [0,1)$ [resp. $f^- : X \longrightarrow [0,1)$]. Atunci aplicația $f=f^+ - f^-$ este continuă. Mai mult, $f(x) = f^+(x) - f^-(x) = g^+(x) - g^-(x) = g(x)$ pentru orice $x \in F$, și $-1 < f(x) < 1$ pentru orice $x \in X$.

Q. E. D.

Utilizînd rezultatele stabilite la 5.39, 5.40 și 4.3 obținem imediat următoarea consecință .

5.41. Corolar (Tietze - Urysohn). Fie F o submulțime

închisă a spaţiului normal $X, \{Y_t\}_{t\in T}$ o familie arbitrară de intervale de pe axa reală şi $Y = \prod_{t\in T} Y_t$. Atunci orice aplicaţie continuă $g:F \longrightarrow Y$ poate fi prelungită la o aplicaţie continuă $f:X \longrightarrow Y$. In particular, dacă $Y_t = R$, oricare ar fi $t\in T = \{1,2,\ldots,n\}$, rezultă că orice aplicaţie continuă $g:F \longrightarrow \mathbb{R}^n$ poate fi prelungită la o aplicaţie continuă a lui X în $\mathbb{R}^n$.

5.42. Definiţie. Un spaţiu topologic X se numeşte local compact dacă pentru fiecare $x\in X$ există o mulţime deschisă D_x cu proprietatea $x\in D_x$ şi astfel încît $\overline{D}_x$ să fie compactă.

De exemplu, spaţiul real aritmetic $\mathbb{R}^n$ dotat cu topologia canonică determinată de metrica euclidiană este un spaţiu topologic local compact. Orice spaţiu topologic compact este local compact. Suma oricărei familii de spaţii topologice local compacta este un spaţiu topologic local compact (v.definiţia 2.14).

5.43. Observaţii. 1) Un subspaţiu al unui spaţiu local compact nu este în mod necesar local compact. De exemplu $\mathbb{R}$ cu topologia canonică este local compact, dar $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ nu este local compact în topologia relativă. Cu alte cuvinte, proprietatea unui spaţiu topologic de a fi local compact nu este ereditară. In schimb orice mulţime deschisă nevidă dintr-un spaţiu topologic local compact este tot un spaţiu topologic local compact. Mai general, orice intersecţie dintre o mulţime deschisă şi una închisă dintr-un spaţiu topologic local compact este un spaţiu topologic local compact. Demonstraţia acestei ultime afirmaţii poate fi găsită de exemplu în [29] .

2) Un produs finit de spaţii topologice local compacte este local compact. In adevăr, dacă $X_1,\ldots,X_k$ sînt local compacte şi $x=(x_1,\ldots,x_k) \in X_1x\ldots xX_k$, atunci există mulţimile deschise $D_i \subset X_i$ $(i=1,\ldots,k)$ astfel încît $x_i \in D_i$ şi $\overline{D}_i$ să fie compacte. In acest caz, $x\in D_1x\ldots xD_k$ şi $\overline{D_1x\ldots xD_k}=$

$=\bar{D}_1 x \ldots x \bar{D}_k$ este compact [v.4.2,2) şi 4.8] . Să observăm că această motivaţie nu mai este valabilă în cazul produselor infinite, deoarece mulţimile de forma $\prod_{t\in T} D_t$ (D_t fiind deschisă în X_t pentru orice $t \in T$) nu sînt în general deschise în $\prod_{t\in T} X_t$ [v.4.2,1),2)] .

Să remarcăm acum că o aplicare convenabilă a lemei lui Urysohn pentru spaţii Hausdorff compacte, care aşa cum am văzut sînt spaţii normale [v.5.30,6)] , ne conduce la următorul fapt important.

5.44. Propoziţie. Fie X un spaţiu Hausdorff, local compact şi C o submulţime compactă din X. Atunci există o mulţime deschisă D în X, $D \supset C$, şi o aplicaţie continuă $g: X \longrightarrow [0,1]$ astfel încît $g_{|C} = 1$ şi $g_{|\complement D} = 0$.

Demonstraţie. Deoarece X este spaţiu local compact, pentru fiecare $x \in C$, există o mulţime deschisă D_x în X ce conţine x şi astfel încît $\bar{D}_x$ să fie compactă. Dar C este compactă, deci există un număr finit $x_1, \ldots, x_m$ de puncte din C astfel încît $C \subset \bigcup_{i=1}^{m} D_{x_i}$, Fie $D = \bigcup_{i=1}^{m} D_{x_i}$. Deoarece $K = \bar{D} = \bigcup_{i=1}^{m} \bar{D}_{x_i}$ este o uniune finită de mulţimi compacte din X, K este un compact din X (v.3.13). Pe de altă parte, X este spaţiu Hausdorff şi $K \subset X$, deci K este tot un spaţiu Hausdorff, în topologia relativă. Prin urmare, K este un spaţiu Hausdorff compact, deci normal. Dar $C = K \cap C$ şi $C_K(D) = K \cap C_X(D)$ sînt mulţimi închise în K, căci C şi $C_X(D)$ sînt mulţimi închise în X, astfel încît în baza lemei lui Urysohn există o aplicaţie continuă $f_1: K \longrightarrow [0,1]$ cu proprietăţile $f_{1|C} = 1$ şi $f_{1|C_K(D)} = 0$. Să definim apoi aplicaţia continuă $f_2: C_X(D) \longrightarrow [0,1]$, $f_2(p) = 0$, $p \in C_X(D)$. Ţinînd seama de 2.61, aplicaţia $g: X \longrightarrow [0,1]$ definită prin

$$g(x) = \begin{cases} f_1(x) & , \ x \in K \ , \\ f_2(x) & , \ x \in C_X(D) \end{cases}$$

este continuă.

Q. E. D.

5.45. Observaţie. Dacă X este un spaţiu topologic şi $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ o aplicaţie, atunci prin suportul lui f, notat cu $\mathrm{supp}(f)$, se înţelege închiderea mulţimii $\{ x \in X \mid f(x) \neq 0 \}$ (v. 2.18). Propoziţia 5.44 afirmă în esenţă existenţa funcţiilor reale continue cu suport compact pe spaţii Hausdorff local compacte. In adevăr, din demonstraţia lui 5.44 rezultă $g|_D \neq 0$, adică $\mathrm{supp}(g) = \overline{D}$ şi $\overline{D} = K$ este compactă.

Să notăm prin K corpul real sau complex.

5.46. Definiţie. Se numeşte spaţiu vectorial-topologic un spaţiu vectorial X care este în acelaşi timp un spaţiu topologic astfel încît următoarele două condiţii să fie verificate:

(a) Aplicaţia $(u,v) \longmapsto u+v$ a lui $X \times X$ în X este continuă;

(b) Aplicaţia $(\alpha, v) \longmapsto \alpha v$ a lui $K \times X$ în X este continuă.

Dacă X este un spaţiu vectorial topologic, o mulţime A din X se zice absorbantă dacă pentru orice $x \in X$ există $\varepsilon > 0$ astfel încît $\lambda x \in A$ dacă $0 < |\lambda| \leqslant \varepsilon$. Din continuitatea aplicaţiei $\lambda \longmapsto \lambda x$ a lui K în X, rezultă că orice vecinătate a originii este o mulţime absorbantă. Prin urmare, înfăşurătoarea liniară a unei vecinătăţi a originii dintr-un spaţiu vectorial topologic X coincide cu X.

5.47. Propoziţie. Un spaţiu vectorial topologic (real sau complex) local compact este finit dimensional.

Demonstrație (A.Gleason). Fie D o mulțime deschisă ce conține originea spațiului vectorial topologic X astfel încît $V=\overline{D}$ să fie compactă. Să alegem $e_1,\dots,e_m \in V$ astfel încît $V \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} (e_i + \frac{1}{2}V)$ și deci $\frac{1}{2^n} V \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} (\frac{1}{2^n} e_i + \frac{1}{2^{n+1}} V)$. Dat $v \in V$ să alegem inductiv un șir $j: \mathbb{N} \longrightarrow \{1,2,\dots,m\}$ astfel încît $v - e_{j(0)} - \frac{1}{2} e_{j(1)} - \dots - \frac{1}{2^n} e_{j(n)} \in \frac{1}{2^{n+1}} V$. Deoarece V este compactă, pentru orice vecinătate U a originii putem găsi un număr natural n astfel încît $\frac{1}{2^n} V \subset U$. Prin urmare, $v = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} e_{j(n)}$. Dacă definim $\alpha_i = \sum_{j(n)=i} \frac{1}{2^n}$, atunci $v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_m e_m$. Deoarece înfășurătoarea liniară a lui V coincide cu X, rezultă că mulțimea finită $\{e_1,\dots,e_m\}$ generează X, adică $\dim X \leqslant m$.

Q. E. D.

5.48. Corolar. Orice mulțime compactă dintr-un spațiu vectorial topologic infinit dimensional este rară.

Demonstrație. Fie K o mulțime compactă din spațiul vectorial topologic infinit dimensional X. Dacă $K = \emptyset$ afirmația este imediată. Să presupunem atunci $K \neq \emptyset$. Dacă $K=\overline{K}$ nu ar fi rară, atunci $\mathrm{Int}(K) \neq \emptyset$. Ținînd seama de definiția interiorului unei mulțimi [v.2.5,5)], există o mulțime deschisă nevidă $D \subset K$. Dar atunci $\overline{D} \subset K$, ceea ce implică $\overline{D}$ compactă (v.3.12). In acest caz orice punct din X aparține (via translații) unei mulțimi deschise cu închiderea compactă, așa încît X este local compact, deci finit dimensional ceea ce contrazice ipoteza. Prin urmare K este rară.

Q. E. D.

5.49. Corolar. Dacă X este un spaţiu vectorial topologic infinit dimensional şi $f:X \longrightarrow \mathbb{K}$ este o aplicaţie continuă cu suportul compact, atunci $f=o$.

Demonstraţie. Dacă $K=\operatorname{supp}(f) = \overline{\{ x\in X \mid f(x) \neq o \}}$ este compactă, atunci K este rară (v.5.48), ceea ce este echivalent cu $\overline{C_X(K)} = X$ [v.2.24,3)] . Dar $f=o$ pe mulţimea $C_X(K)$, aşa încît $f=o$ şi pe mulţimea $\overline{C_X(K)} = X$, căci f este continuă (v.5.9).

Q. E. D.

Spaţii topologice complet regulate

Prin analogie cu problema completării unui spaţiu metric (v.teorema de completare a lui Hausdorff ce succede observaţiei 3.39), vom aborda întîi problema compactificării unui spaţiu topologic.

5.50. Definiţie. Fie $(X,\mathcal{T})$ un spaţiu T_1 şi ∞ un obiect ce nu aparţine lui X. Compactificarea cu un punct a lui $(X,\mathcal{T})$ este spaţiul topologic $(\tilde{X},\tilde{\mathcal{T}})$, unde $\tilde{X}=X \cup \{\infty\}$, topologia $\tilde{\mathcal{T}}$ fiind obţinută după cum urmează.

Fie

$$\mathcal{V} = \{ V\subset\tilde{X} \mid C_{\tilde{X}}(V)=V' \text{ este o submulţime compactă şi închisă a lui } X \} =$$

$$= \{ \tilde{X} \setminus F \mid F \text{ este compactă şi închisă în } X \} .$$

Să observăm că $\tilde{X} \in \mathcal{V}$ şi orice element al lui $\mathcal{V}$ trebuie să conţină pe ∞ .

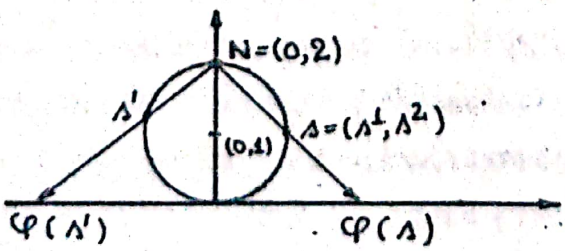
Familia $\mathcal{B} = \mathcal{T} \cup \mathcal{V}$ este atunci o bază pentru o topologie pe $\tilde{X}$. In adevăr, $\emptyset \in \mathcal{B}$ căci $\emptyset \in \mathcal{T}$. Pe de altă parte, $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B=\tilde{X}$ căci $\tilde{X} \in \mathcal{V}$. In sfîrşit, să verifi-

căm condiţia (3) din definiţia 2.33. Dacă $D_1, D_2 \in \mathcal{T}$, atunci $D_1 \cap D_2 = D \in \mathcal{T} \subset \mathcal{B}$. Dacă $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$, atunci $V_1 \cap V_2 = V \in \mathcal{V} \subset \mathcal{B}$. In adevăr, $(V_1 \cap V_2)' = V_1' \cup V_2'$ este compactă şi închisă în X, căci V_1' şi V_2' au aceste proprietăţi (v.3.14). Dacă $D \in \mathcal{T}$ şi $V \in \mathcal{V}$, $D \cap V \in \mathcal{T} \subset \mathcal{B}$. In adevăr $\infty \bar{\in} D \cap V$ căci $\infty \bar{\in} D$, aşa încît $D \cap V = D \cap (V')' = D \cap C_X(V')$.

Prin definiţie, $\tilde{\mathcal{T}}$ este topologia generată pe $\tilde{X}$ de baza $\mathcal{B}$ (v.2.34).

Să observăm acum că topologia indusă de $\tilde{\mathcal{T}}$ pe $X \subset \tilde{X}$ coincide cu topologia iniţială $\mathcal{T}$ pe X. In adevăr, fie $\tilde{\mathcal{T}}_X$ topologia relativă pe X ca submulţime a lui $\tilde{X}$. Dacă $D \in \mathcal{T} \subset \mathcal{B}$, atunci $D \in \tilde{\mathcal{T}}$ [v.2.35,1)] astfel încît $D = X \cap D \in \tilde{\mathcal{T}}_X$, adică $\mathcal{T} \subseteq \tilde{\mathcal{T}}_X$. Reciproc, dacă $\tilde{D} \in \tilde{\mathcal{T}}_X$, există $V \in \tilde{\mathcal{T}}$ astfel încît $\tilde{D} = X \cap V$. Dacă V este o uniune de mulţimi din $\mathcal{T}$, atunci $\tilde{D} = V \in \mathcal{T}$. Dacă $V = \bigcup_{\tilde{V} \in \tilde{\mathcal{V}}} \tilde{V}$, unde $\tilde{\mathcal{V}} \subseteq \mathcal{V}$, atunci $\tilde{D} = \bigcup_{\tilde{V} \in \tilde{\mathcal{V}}} (X \cap \tilde{V}) = \bigcup_{\tilde{V} \in \tilde{\mathcal{V}}} C_X(V') \in \mathcal{T}$ ş.a.m.d., adică $\tilde{\mathcal{T}}_X \subseteq \mathcal{T}$. Deci $\mathcal{T} = \tilde{\mathcal{T}}_X$.

Exemple. 1) Fie $X = \mathbb{R}$ dotat cu topologia obişnuită. Atunci $\tilde{X} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$; o mulţime deschisă din X ce conţine ∞ este complementara unei submulţimi compacte din $\mathbb{R}$. In particular, dată o mulţime $D \in \tilde{\mathcal{T}}$ ce conţine ∞, există un număr real $M_D > 0$ astfel încît $|x| > M_D$ să implice $x \in D$. $\tilde{X}$ este homeomorf cu cercul S^1, homeomorfismul fiind construit cu ajutorul proiecţiei stereografice din polul Nord pe tangentă la S^1 în polul Sud. Se constată imediat că aplicaţia



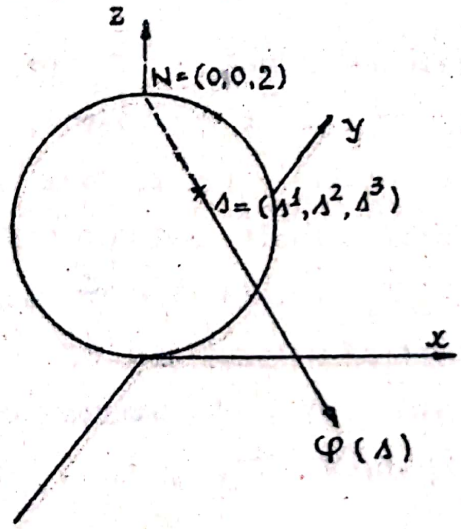
$$\varphi : S^1 \longrightarrow \tilde{X},$$

$$\varphi(s^1, s^2) = \frac{2s^1}{2 - s^2}$$

pentru $(s^1, s^2) \neq (0,2)$

$(s^1,s^2) \in S^1$, şi $\varphi(0,2) = \infty$, este un homeomorfism.

2) Fie $X = \mathbb{R}^2$ dotat cu topologia obişnuită. Atunci $\tilde{X} = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ şi mulţimile deschise din $\tilde{X}$ ce conţin ∞ sînt complementare de mulţimi compacte din $\mathbb{R}^2$. In particular, fiecare mulţime deschisă ce conţine ∞ trebuie să conţină toate puctele situate în exteriorul unei celule de rază suficient de mare. $\tilde{X}$ este homeomorf cu sfera S^2. Un homeomorfism $\varphi : S^2 \longrightarrow \tilde{X}$ se poate construi imediat cu ajutorul proiecţiei stereografice din polul



Nord al sferei S^2 pe planul tangent la S^2 în polul Sud. Astfel se constată imediat că aplicaţia φ dată prin

$$\varphi(s^1,s^2,s^3) = \left(\frac{2s^1}{2-s^3}, \frac{2s^2}{2-s^3}\right),$$

$(s^1,s^2,s^2) \neq (0,0,2)$,

$(s^1,s^2,s^3) \in S^2$, şi $\varphi(0,0,2) = \infty$, este un homeomorfism. Mai general, fie $X = \mathbb{R}^n$. Atunci $\tilde{X}$ este homeomorf cu S^n, homeomorfismul fiind construit şi în acest caz cu ajutorul proiecţiei stereografice.

Spaţiul topologic $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{T}})$, unde $X = \mathbb{R}^n$ se numeşte <u>spaţiul conform n-dimensional</u>, iar elementul $\infty \in \tilde{X}$ se numeşte punctul lui Möbius. Prin urmare, proiecţia stereografică realizează un homeomorfism între S^n şi spaţiul conform n-dimensional.

<u>Observaţie</u>, Dacă $(X,\mathcal{T})$ este un spaţiu compact, atunci $\{\infty\} \in \mathcal{V} \subset \mathcal{B} \subset \tilde{\mathcal{T}}$ aşa încît în acest caz compactificarea cu un punct al lui $(X,\mathcal{T})$ este neinteresantă, căci se reduce la suma topologică a lui $(X,\mathcal{T})$ cu $(\{\infty\}, 2^{\{\infty\}})$.

5.51. Propoziţie. Fie $(X,\mathcal{T})$ un spaţiu T_1. Atunci compactificarea cu un punct $(\tilde{X},\tilde{\mathcal{T}})$ a lui $(X,\mathcal{T})$ este un spaţiu compact şi satisface axioma de separare T_1. Mai mult, $(\tilde{X},\tilde{\mathcal{T}})$ este un spaţiu Hausdorff dacă şi numai dacă $(X,\mathcal{T})$ este un spaţiu Hausdorff local compact.

Demonstraţie. Să verificăm întîi că $(\tilde{X},\tilde{\mathcal{T}})$ este un spaţiu T_1. In adevăr, dacă x_1 şi $x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, atunci deoarece $(X,\mathcal{T})$ este spaţiu T_1, există mulţimile $D_1, D_2 \in \mathcal{T}$ astfel încît $x_1 \in D_1$, $x_2 \overline{\in} D_1$ şi $x_2 \in D_2$, $x_1 \overline{\in} D_2$. Dar $\mathcal{T} \subset \mathcal{B} \subset \tilde{\mathcal{T}}$ aşa încît $D_1, D_2 \in \tilde{\mathcal{T}}$. Dacă $x_1 \in X$ şi $x_2 = \infty$, fie $D_1 = X$ şi $D_2 = \{x_1\}' = C_{\tilde{X}}(\{x_1\})$. Atunci $D_1 \in \tilde{\mathcal{T}}$ căci $D_1 \in \mathcal{T}$ şi $D_2 \in \tilde{\mathcal{T}}$ deoarece D_2 este complementara în raport cu $\tilde{X}$ a mulţimii închise compacte $\{x_1\}$ din X. Să observăm că $\{x_1\}$ este închisă în X deoarece $(X,\mathcal{T})$ este un spaţiu T_1 (v.5.5). In acest caz $x_1 \in D_1$, $x_1 \overline{\in} D_2$, $x_2 \in D_2$ şi $x_2 \overline{\in} D_1$.

Să arătăm acum că $(\tilde{X},\tilde{\mathcal{T}})$ este un spaţiu compact. In adevăr, fie $\{D_t\}_{t\in T}$ o acoperire deschisă pentru $(\tilde{X},\tilde{\mathcal{T}})$. Atunci există $t_0 \in T$ astfel încît $\infty \in D_{t_0}$. Să arătăm că $D'_{t_0} = C_{\tilde{X}}(D_{t_0})$ este o submulţime compactă a lui X. In acest scop să observăm întîi că putem scrie $D_{t_0} = \bigcup_{V\in\mathcal{B}_1} V$, unde $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$ fiind baza pentru topologia $\tilde{\mathcal{T}}$. Deoarece $\infty \in D_{t_0}$, există cel puţin o mulţime $V \in \mathcal{B}_1$ astfel încît $\infty \in V$, ceea ce implică $V = F'$, unde F este o submulţime compactă şi închisă, în X. Prin urmare, $D'_{t_0} = \bigcap_{V\in\mathcal{B}_1} V' \subset F$, adică D'_{t_0} este o submulţime închisă, a mulţimii compacte F, de unde rezultă că D'_{t_0} este o submulţime compactă a lui X (v.3.12 şi 2.12). Deoarece $\{D_t\}_{t\in T}$ este o acoperire deschisă pentru $(\tilde{X},\tilde{\mathcal{T}})$, familia $\{D'_{t_0} \cap D_t\}_{t\in T\setminus\{t_0\}}$ este o acoperire deschisă pentru $(D'_{t_0}, \tilde{\mathcal{T}}_{D'_{t_0}})$, anume acoperirea

indusă (v.3.4). Deoarece $(D'_{t_o}, \tilde{\tau}_{D'_{t_o}})$ este un spaţiu compact, există o subfamilie finită $\{D'_{t_o} \cap^{o} D_{t_1}, \ldots, D'_{t_o} \cap D_{t_k}\}$ ce acoperă D'_{t_o}. Prin urmare familia finită $\{D_{t_o}, D_{t_1}, \ldots, D_{t_k}\}$ este o acoperire deschisă pentru $(\tilde{X}, \tilde{\tau})$, adică $(\tilde{X}, \tilde{\tau})$ este un spaţiu compact.

Să presupunem acum că $(\tilde{X}, \tilde{\tau})$ este un spaţiu Hausdorff şi să arătăm că (X, τ) este un spaţiu Hausdorff local compact. Deoarece orice submulţime a unui spaţiu Hausdorff este un spaţiu Hausdorff în topologia relativă [v. 5.2,2)] şi topologia τ coincide cu topologia relativă a lui $X \subset \tilde{X}$, rezultă că (X, τ) este un spaţiu Hausdorff. Pe de altă parte, să observăm că pentru fiecare $x \in X$ există mulţimile disjuncte $D_1, D_2 \in \tilde{\tau}$ astfel încît $x \in D_1$ şi $\infty \in D_2$, ceea ce este o consecinţă a faptului că $(\tilde{X}, \tilde{\tau})$ este un spaţiu Hausdorff. Procedînd în acelaşi mod ca şi pentru mulţimea D'_{t_o}, se poate arăta că mulţimea D'_2 este compactă. Dar $D_1 \subset D'_2$, ceea ce implică $\bar{D}_1 \subset \bar{D}'_2 = D'_2$, aşa încît în baza lui 3.12, $\bar{D}_1$ este compactă.

Reciproc, să presupunem că (X, τ) este un spaţiu Hausdorff local compact şi fie $x_1, x_2 \in \tilde{X}$, $x_1 \neq x_2$. Dacă $x_1, x_2 \in X$, atunci există mulţimile disjuncte $D_1, D_2 \in \tau$ astfel încît $x_1 \in D_1$, $x_2 \in D_2$. Dar în acest caz $D_1, D_2 \in \tilde{\tau}$, căci $\tau \subset \tilde{\tau}$. Dacă $x_1 \in X$ şi $x_2 = \infty$, deoarece (X, τ) este local compact, există o mulţime $D \in \tau$ astfel încît $x_1 \in D$ şi $\bar{D}$ este compactă, deci şi închisă în X, v.5.10. Atunci $V = C_{\tilde{X}}(\bar{D}) \in \tilde{\tau}$, $x_1 \in D$, $x_2 \in V$ şi $D \cap V = \emptyset$. Prin urmare, $(\tilde{X}, \tilde{\tau})$ este un spaţiu Hausdorff.

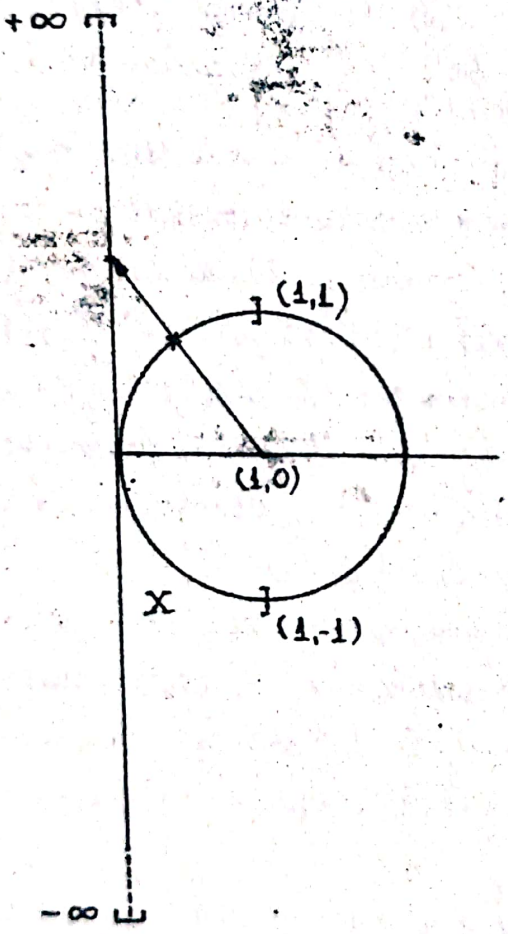
Q. E. D.

5.52. Observaţii. 1) In afară de compactificarea cu un punct, numită şi compactificarea lui P.S. Alexandrov, există şi alte posibilităţi de compactificare a unui spaţiu topologic local

compact. Să indicăm de exemplu una pentru $\mathbb{R}$ (cu topologia obişnuită) diferită de cea a lui Alexandrov. Fie în $\mathbb{R}^2$ cu coordonatele x,y, semicercul X definit prin $(x-1)^2+y^2=1$, unde $x \leqslant 1$. X este atunci o submulţime mărginită a lui $\mathbb{R}^2$. De asemenea, X este o submulţime închisă a lui $\mathbb{R}^2$, căci X este o intersecţie de două mulţimi închise:

$$X = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leqslant 1 \} \cap f^{-1}(\{1\}),$$

unde $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y)=(x-1)^2 + y^2$, este continuă. Deci X este o submulţime compactă din $\mathbb{R}^2$ (v.5.12). Să considerăm proiecţia centrală g a lui X din punctul $(1,0)$ pe dreapta $x=0$, identificată cu $\mathbb{R}$. g defineşte o bijecţie între $X \setminus \{(1,1), (1,-1)\}$ şi $\mathbb{R}$, care este de fapt un homeomorfism. Dacă adăugăm dreptei $x=0$ două puncte distincte $-\infty$ şi $+\infty$ atunci g va defini o bijecţie între X şi axa reală completată cu cele două puncte "improprii" $-\infty$ şi $+\infty$. Dacă topologizăm mulţimea $[-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ astfel încît bijecţia g să definească un homeomorfism între X şi $[-\infty,+\infty]$ adică D este deschisă în $[-\infty, \infty]$ dacă şi numai dacă $f^{-1}(D)$ este deschisă în X, atunci $\mathbb{R}$ completat cu cele două puncte $-\infty$ şi $+\infty$ devine un spaţiu topologic compact (v.3.16).



2) Fie $(X,\mathcal{T})$ şi $(Y,\mathcal{U})$ două spaţii topologice T_1 şi f o aplicaţie continuă proprie de la $(X,\mathcal{T})$ în $(Y,\mathcal{U})$. Atunci f poate fi prelungită la o aplicaţie continuă $\tilde{f}$ de la spaţiul topologic $(\tilde{X},\tilde{\mathcal{T}})$ [=compactificarea cu un punct a lui $(X,\mathcal{T})$] în spaţiul topologic $(\tilde{Y},\tilde{\mathcal{U}})$ [= compactificarea cu un punct a lui $(Y,\mathcal{U})$] .

In adevăr, dacă $\tilde{X}=X\cup\{\infty\}$ şi $\tilde{Y}=Y\cup\{\infty_1\}$, n-avem decît să definim $\tilde{f}:\tilde{X}\longrightarrow\tilde{Y}$ prin

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) & \text{pentru } x\in X,\\ \infty_1 & \text{pentru } x=\infty \end{cases}$$

şi să observăm că pentru orice $V\subset\tilde{Y}$ astfel încît $\infty_1\in V$ şi astfel încît $C_{\tilde{Y}}(V)$ să fie o submulţime închisă şi compactă din Y, mulţimea $(\tilde{f})^{-1}(V)\subset\tilde{X}$ este astfel încît $\infty\in(\tilde{f})^{-1}(V)$ şi astfel încît $C_{\tilde{X}}((\tilde{f})^{-1}(V))=(\tilde{f})^{-1}(C_{\tilde{Y}}(V))=f^{-1}(C_{\tilde{Y}}(V))$ este o submulţime închisă şi compactă a lui X căci f este continuă şi proprie, adică $(\tilde{f})^{-1}(V)\in\tilde{\mathcal{T}}$. De asemenea, pentru orice $U\in\mathcal{U}$, $(\tilde{f})^{-1}(U)=f^{-1}(U)\in\mathcal{T}\subset\tilde{\mathcal{T}}$. Continuitatea lui $\tilde{f}$ este atunci o consecinţă imediată a lui 2.53.

Reciproc, dacă $(X,\mathcal{T})$ este spaţiu T_1, $(Y,\mathcal{U})$ spaţiu Hausdorff şi f este o aplicaţie continuă de la $(X,\mathcal{T})$ în $(Y,\mathcal{U})$ astfel încît aplicaţia $\tilde{f}:\tilde{X}\longrightarrow\tilde{Y}$ definită mai sus este o aplicaţie continuă de la $(\tilde{X},\tilde{\mathcal{T}})$ în $(\tilde{Y},\tilde{\mathcal{U}})$, atunci f este o aplicaţie proprie.

In adevăr, dacă K este un compact din Y, K este o submulţime închisă din Y (v.5.10), ceea ce implică $\infty_1\in C_{\tilde{Y}}(K)\in\tilde{\mathcal{U}}$. Dar atunci $C_{\tilde{X}}(f^{-1}(K))=C_{\tilde{X}}((\tilde{f})^{-1}(K))=(\tilde{f})^{-1}(C_{\tilde{Y}}(K))\in\tilde{\mathcal{T}}$, căci $\tilde{f}$ este continuă, Deoarece $\infty\in C_{\tilde{X}}(f^{-1}(K))$ şi ţinînd seama de definiţia topologiei $\tilde{\mathcal{T}}$, există o submulţime compactă şi închisă K' în X astfel încît $\infty\in C_{\tilde{X}}(K')\subset C_{\tilde{X}}(f^{-1}(K))$,

de unde rezultă $K' \supset f^{-1}(K)$. Cum f este continuă, urmează că $f^{-1}(K)$ este o submulţime închisă din X, deci din K', aşa încît $f^{-1}(K)$ este o submulţime compactă din X (v.3.12 şi 2.12).

In particular, dacă $(X,\mathcal{T})$ şi $(Y,\mathcal{U})$ sînt spaţii Hausdorff local compacte şi $f:X\longrightarrow Y$ este un homeomorfism de la $(X,\mathcal{T})$ pe $(Y,\mathcal{U})$ atunci, aplicaţia $\tilde{f}:\tilde{X}\longrightarrow\tilde{Y}$ definită mai sus este un homeomorfism de la $(\tilde{X},\tilde{\mathcal{T}})$ pe $(\tilde{Y},\tilde{\mathcal{U}})$. In adevăr, în aceste ipoteze, aplicaţia $\tilde{f}$ este o bijecţie continuă între spaţiile Hausdorff compacte $(\tilde{X},\tilde{\mathcal{T}})$ şi $(\tilde{Y},\tilde{\mathcal{U}})$ (v.5.51), deci este un homeomorfism (v.5.16). De exemplu, orice asemănare a spaţiului $\mathbb{R}^n$ (adică compunerea dintre o izometrie a lui $\mathbb{R}^n$ şi o omotetie a lui $\mathbb{R}^n$) de raport difefit de zero este un homeomorfism al lui $\mathbb{R}^n$ pe $\mathbb{R}^n$, ce poate fi prelungit la un homeomorfism al spaţiului conform ce păstrează fix punctul lui Möbius.

5.53. Definiţie. Un spaţiu topologic $(X,\mathcal{T})$ se numeşte complet regulat dacă sînt îndeplinite următoarele două condiţii:

(1) $(X,\mathcal{T})$ este un spaţiu T_1

şi

(2) dat orice $x\in X$ şi orice mulţime închisă F din X încît $x\notin F$, există o funcţie continuă $f:X\longrightarrow[0,1]$ astfel încît $f(x)=0$ şi $f(F)=\{1\}$.

5.54. Observaţii. 1) Completa regularitate a unui spaţiu topologic este o proprietate topologică.

2) In baza lemei lui Urysohn (v.5.35), orice spaţiu normal este complet regulat. In particular, orice spaţiu Hausdorff compact este complet regulat.

3) Orice spaţiu complet regulat este regulat. In adevăr, dacă F este o mulţime închisă din spaţiul complet regulat X şi $x\notin F$, atunci mulţimilr deschise

$$D_1=f^{-1}([0,\tfrac{1}{2}))\text{ şi }D_2=f^{-1}((\tfrac{1}{2},1])$$

sînt disjuncte, $x \in D_1$ şi $F \subset D_2$, unde $f: X \longrightarrow [0,1]$ este o funcţie continuă astfel încît $f(x) = 0$ şi $f(F) = \{1\}$.

4) Dacă X este un spaţiu complet regulat şi $\mathcal{H}$ este mulţimea tuturor aplicaţiilor continue definite pe X cu valori în $[0,1]$, atunci $\mathcal{H}$ separă punctele lui X. In adevăr, pentru fiecare $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, există $f \in \mathcal{H}$ astfel încît $f(x_1) = 0 \neq 1 = f(x_2)$.

5) Dacă X este un spaţiu complet regulat şi $\mathcal{H}$ are semnificaţia de mai sus, atunci familia

$$\{\emptyset, B_f = f^{-1}([0,1)) \mid f \in \mathcal{H}\}$$

este o bază pentru topologia lui X.

In adevăr, dacă D este o mulţime deschisă nevidă din X şi $x \in D$ este un punct arbitrar, atunci în baza condiţiei (2) din definiţia 5.53 există o aplicaţie continuă $f_x: X \longrightarrow [0,1]$ astfel încît $f_x(x) = 0$ şi $f_x|_{D'} = 1$. Atunci rezultă că $x \in B_{f_x} \subset D$, adică $D = \bigcup_{x \in D} B_{f_x}$. Pe de altă parte, pentru orice $f \in \mathcal{H}$, mulţimea B_f este deschisă în X, căci $[0,1)$ este deschisă în $[0,1]$. Afirmaţia este atunci o consecinţă imediată a lui 2.35,4).

5.55 Propoziţie. Orice subspaţiu topologic al unui spaţiu complet regulat este complet regulat. Cu alte cuvinte, proprietatea unui spaţiu topologic de a fi complet regulat este ereditară.

Demonstraţie. Fie $(X, \mathcal{T})$ un spaţiu complet regulat şi $S \subset X$. Deoarece orice subspaţiu al unui spaţiu T_1 este T_1 [v.5.2,2)], $(S, \mathcal{T}_S)$ este un spaţiu T_1. Fie $A \subset S$ astfel încît $C_S(A) \in \mathcal{T}_S$ şi $s \in S$, $s \overline{\in} A$. Atunci $A = S \cap F$, unde F este o mulţime închisă din X şi $s \overline{\in} F$, căci în caz contrar $s \in S \cap F = A$. Deoarece $(X, \mathcal{T})$ este un spaţiu complet regulat, există o funcţie continuă $f: X \longrightarrow [0,1]$ astfel încît $f(s) = 0$ şi $f(F) = \{1\}$. Restricţia lui f la S este continuă [v.2.29,4)] şi are proprietăţile

dorite, adică $f_{|S}(s) = o$ şi $f_{|S}(A) = 1$.

Q. E. D.

5.56. Propoziţie. Orice spaţiu Hausdorff local compact este complet regulat. In particular, dacă X este un spaţiu Hausdorff local compact, $F \subset X$ este o mulţime închisă şi $x \in X$, $x \notin F$, există o funcţie continuă $f: X \longrightarrow [o,1]$ astfel încît $f(x) = o$ şi $f(F) = \{1\}$.

Demonstraţie. Dacă $(X, \mathcal{T})$ este un spaţiu Hausdorff local compact, atunci în baza lui 5.51 compactificarea cu un punct $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{T}})$ a lui $(X, \mathcal{T})$ este un spaţiu Hausdorff compact, deci un spaţiu normal (v.5.23). In particular, $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{T}})$ este complet regulat [v. 5.54,2)] şi deci $X \subset \tilde{X}$ va fi de asemenea complet regulat (v.5.55)

Q. E. D.

5.57. Propoziţie. Condiţia necesară şi suficientă ca un produs de spaţii topologice să fie complet regulat este ca fiecare factor să fie un spaţiu topologic complet regulat. Cu alte cuvinte, completa regularitate a unui spaţiu topologic este o proprietate multiplicativă.

Demonstraţie. Necesitatea este o consecinţă imediată a lui 5.55 [v.şi demonstraţia observaţiei 5.2.6,)] . Reciproc, să presupunem că avem o familie nevidă $\{X_t\}_{t \in T}$ de spaţii topologice complet regulate şi să dovedim că $X = \prod_{t \in T} X_t$ este un spaţiu topologic complet regulat. In baza lui 5.2.6), X este un spaţiu T_1. Fie $x \in X$ şi F o submulţime închisă din X astfel încît $x \notin F$. Atunci $x \in F'$ şi cum F' este deschisă, există o mulţime deschisă din baza pentru topologia produs de forma $Q = \prod_{t \in T} Q_t$, unde

$$Q_t = \begin{cases} X_t & \text{pentru } t \notin \{t_1, \ldots, t_n\}, \\ D_t & \text{pentru } t \in \{t_1, \ldots, t_n\}, \end{cases}$$

D_t fiind deschisă în X_t şi diferită de X_t, oricare ar fi $t \in \{t_1,\dots,t_n\} \subset T$, astfel încît $x \in Q \subset F'$. Pentru fiecare $i=1,\dots,n$, fie $f_i : X_{t_i} \longrightarrow [0,1]$ o aplicaţie continuă astfel încît

$$f_i(p_{t_i}(x)) = 0 \quad \text{şi} \quad f_i|_{C_{X_{t_i}}(D_{t_i})} = 1,$$

unde $p_{t_i} : X \longrightarrow X_{t_i}$ este proiecţia canonică. Aplicaţia $f_i \circ p_{t_i} : X \longrightarrow [0,1]$ este atunci continuă şi în baza lui 2,60, 4), aceeaşi proprietate o va avea şi aplicaţia :

$$f = \max_{1 \le i \le n} \{ f_i \circ p_{t_i} \} : X \longrightarrow [0,1] .$$

Deoarece $(f_i \circ p_{t_i})(x) = 0$, pentru orice $i=1,\dots,n$ rezultă $f(x)=0$. Dacă $y \in F$, atunci $y \in Q'$ astfel încît pentru cel puţin un indice $i \in \{1,\dots,n\}$, $p_{t_i}(y) \in C_{X_{t_i}}(D_{t_i})$, de unde rezultă $f_i(p_{t_i}(y)) = 1$, ceea ce în baza definiţiei lui f implică $f(y)=1$.

Q. E. D.

5.58. Propoziţie. Fie (X,T) un spaţiu topologic complet regulat şi $\mathcal{F}$ o mulţime de aplicaţii continue definite pe X cu valori în $[0,1]$ astfel încît familia $\mathcal{B} = \{\emptyset, B_f = f^{-1}([0,1)) \mid f \in \mathcal{F}\}$ să fie o bază pentru topologia T. Atunci există o scufundare topologică a lui X în $\prod_{f \in \mathcal{F}} I_f$, adică X este homeomorf cu un subspaţiu al spaţiului topologic $\prod_{f \in \mathcal{F}} I_f$, unde $I_f = [0,1]$ pentru orice $f \in \mathcal{F}$.

Demonstraţie. Fie $\varphi : X \longrightarrow \prod_{f \in \mathcal{F}} I_f$ aplicaţia definită prin $[\varphi(x)](f) = f(x)$. Procedînd analog ca în demonstraţia lui 4.16 rezultă că aplicaţia φ este continuă. In particular, aplicaţia $\varphi_{sur} : X \longrightarrow \varphi(X)$ este continuă

(v.2.68) . Dacă $p_f : \prod_{g \in \mathcal{F}} I_g \longrightarrow I_f = [0,1]$ notează proiecţia canonică pe I_f, atunci $f = p_f \circ \varphi$ pentru orice $f \in \mathcal{F}$. Notînd $\tilde{B}_f = p_f^{-1}([0,1))$ şi ţinînd seama că $f = p_f \circ \varphi$, rezultă $B_f = \varphi^{-1}(\tilde{B}_f)$ şi deci $\varphi(B_f) = \varphi(\varphi^{-1}(\tilde{B}_f)) \subseteq \tilde{B}_f$, ceea ce implică $\varphi(B_f) = \tilde{B}_f \cap \varphi(X)$. Deoarece $\tilde{B}_f$ este o mulţime deschisă în $\prod_{f \in \mathcal{F}} I_f$, mulţimea $\varphi(B_f)$ va fi o mulţime deschisă în $\varphi(X)$. Ţinînd seama că $\mathcal{B}$ este o bază pentru $\mathcal{T}$ şi $\varphi(\cup B_f) = \cup \varphi(B_f)$, rezultă că aplicaţia $\varphi_{sur} : X \longrightarrow \varphi(X)$ este deschisă. In plus, aplicaţia φ_{sur} este o bijecţie. In adevăr, fie $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$. Deoarece $(X, \mathcal{T})$ este un spaţiu T_1, există $D \in \mathcal{T}$ astfel încît $x_1 \in D$ şi $x_2 \bar{\in} D$. Deoarece $\mathcal{B}$ este o bază pentru $\mathcal{T}$, există $B_f \in \mathcal{B}$ astfel încît $x_1 \in B_f$ şi $x_2 \in C_X(B_f)$. Atunci $f(x_1) < 1 = f(x_2)$, adică

$$[\varphi(x_1)](f) = f(x_1) < f(x_2) = [\varphi(x_2)](f) ,$$

ceea ce implică $\varphi_{sur}(x_1) \neq \varphi_{sur}(x_2)$. Prin urmare, aplicaţia φ_{sur} este bijectivă, continuă şi deschisă, deci un homeomorfism Cu alte cuvinte, aplicaţia $\varphi : X \longrightarrow \prod_{f \in \mathcal{F}} I_f$ este o scufundare topologică (v.2.76.)

Q. E. D.

Deoarece un produs arbitrar de spaţii compacte este compact (teorema lui Tihonov) şi un produs arbitrar de spaţii Hausdorff este un spaţiu Hausdorff [v.5.2,6)] , rezultă că un produs arbitrar de intervale închise din $\mathbb{R}$ este un spaţiu Hausdorff compact, deci complet regulat [v.5.54,2)] . Prin urmare, orice submulţime a unui produs arbitrar de intervale închise din $\mathbb{R}$ este un spaţiu complet regulat (v.5.55). Pe de altă parte, ţinînd seama de 5.54,5) şi de 5.58, are loc următoarea teoremă a lui Tihonov.

5.59. Corolar. Un spaţiu topologic X este complet regulat dacă şi numai dacă este homeomorf cu un subspaţiu al unui produs topologic de intervale închise din $\mathbb{R}$. Mai precis, X este complet regulat dacă şi numai dacă este homeomorf cu un subspaţiu al lui $\prod_{f\in\mathcal{H}} I_f$, unde $I_f=[0,1]$ pentru orice $f\in\mathcal{H}$, $\mathcal{H}$ având semnificaţia din 5.54,5).

5.60. Corolar. X este un spaţiu topologic complet regulat dacă şi numai dacă este homeomorf cu un subspaţiu al unui spaţiu Hausdorff compact.

5.61. Observaţie. Dacă spaţiul topologic complet regulat X este conceput ca un subspaţiu al lui $\prod_{f\in\mathcal{H}} I_f$, via scufundarea topologică $\varphi : X \longrightarrow \prod_{f\in\mathcal{H}} I_f$, atunci închiderea lui X în $\prod_{f\in\mathcal{H}} I_f$, notată cu $\hat{X}$, este o submulţime închisă din $\prod_{f\in\mathcal{H}} I_f$, deci un subspaţiu compact (v.3.12), în care X este dens. $\hat{X}$ se numeşte compactificarea Stone-Čech a lui X.

5.62. Corolar. Dacă $(X,\mathcal{T})$ este un spaţiu topologic complet regulat pentru care există o bază finită sau numărabilă pentru topologia $\mathcal{T}$, atunci X este homeomorf cu un subspaţiu al lui $\prod_{n\in\mathbb{N}} I_n$, unde $\mathbb{N}$ este mulţimea numerelor naturale, iar $I_n=I=[0,1]$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$. In particular, un spaţiu topologic complet regulat ce admite o bază finită sau numărabilă pentru topologia sa este metrizabil.

In adevăr, ţinînd seama de 2.47 baza precizată la 5.54,5) va conţine o bază finită sau numărabilă şi atunci prima parte a corolarului 5.62 este o consecinţă imediată a lui 5.58. şi a faptului că orice produs finit de forma $Ix\ldots xI$ poate fi identificat cu subspaţiul $Ix\ldots xI\times\{0\}\times\ldots\times\{0\}\times\ldots$ al lui $\prod_{n=1}^{\infty} I_n$. Ultima afirmaţie este o consecinţă a observaţiilor 4.14,1) şi 2).

5.63. Observaţie. Din definiţia topologiei produs este clar că $\prod_{n\in\mathbb{N}} I_n$, $I_n=[0,1]$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$, posedă o bază număra-

bilă pentru topologia sa, așa încît orice subspațiu al lui $\prod_{n\in\mathbb{N}} I_n$ va admite o bază finită sau numărabilă. Tinînd seama de 5.62 urmează că un spațiu topologic complet regulat admite o bază finită sau numărabilă pentru topologia sa dacă și numai dacă el este homeomorf cu un subspațiu al lui $\prod_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

5.64. Teoremă. (P.Urysohn). Fie X un spațiu topologic ce admite o bază finită sau numărabilă pentru topologia sa, adică X satisface a doua axiomă de numărabilitate. Atunci următoarele afirmații sînt echivalente:

(a) X este un spațiu topologic complet regulat;

(b) X este un spațiu normal;

(c) X este un spațiu metrizabil.

Demonstrație. In adevăr, în baza lui 5.62, (a) $\Longrightarrow$ (c). Pe de altă parte, în baza lui 5.33, (c) $\Longrightarrow$ (b), iar în baza lui 5.54,2), (b) $\Longrightarrow$ (a).

Q. E. D.

5.65. Observații. 1) Tinînd seama de 5.56, orice spațiu Hausdorff local compact cu bază finită sau numărabilă este metrizabil. In particular, un spațiu Hausdorff compact este metrizabil dacă și numai dacă el posedă o bază finită sau numărabilă pentru topologia sa. In adevăr, dacă X este un spațiu metric compact, n-avem decît să considerăm pentru fiecare $n=1,2,\ldots$ acoperirea deschisă $\mathcal{V}_n=\{B(x,2^{-n}) \mid x\in X\}$ pentru X cu celule deschise de rază 2^{-n}. Pentru n fixat, din acoperirea deschisă $\mathcal{V}_n$ se poate extrage acoperirea finită $\mathcal{U}_n$. Uniunea $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n$ este atunci o familie numărabilă de celule deschise despre care se poate arăta imediat că formează o bază pentru topologia lui X.

2) Să menționăm în treacăt o altă clasă importantă de spații topologice, definite de J. Dieudonné [11] , ce generalizează spațiile Hausdorff compacte, anume spațiile paracompacte. Un spațiu

topologic Hausdorff X se numeşte <u>paracompact</u> dacă pentru orice acoperire deschisă $\mathcal{V}$ pentru X există o acoperire deschisă $\mathcal{V}_1$ pentru X astfel încît:

(a) $\mathcal{V}_1$ este mai fină decît $\mathcal{V}$, adică orice mulţime din $\mathcal{V}_1$ este conţinută cel puţin într-o mulţime din $\mathcal{V}$;

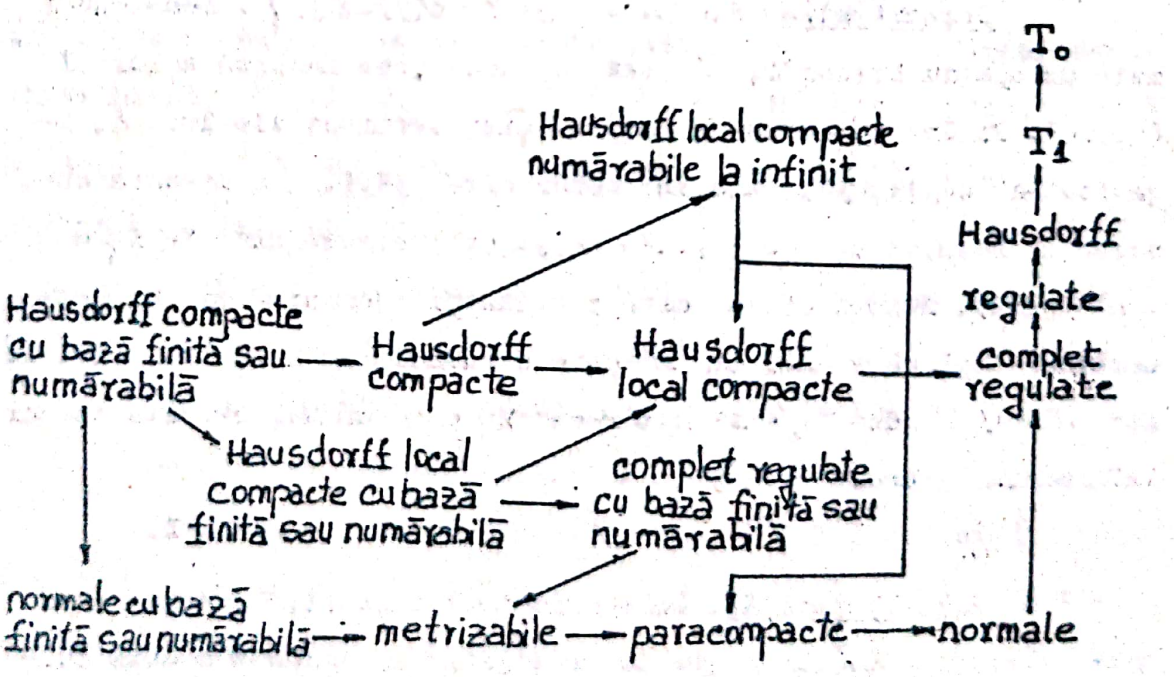
(b) $\mathcal{V}_1$ este local finită, adică orice punct $x \in X$ are o vecinătate ce intersectează doar un număr finit de mulţimi din $\mathcal{V}_1$.

De exemplu, orice spaţiu Hausdorff compact X este paracompact, căci pentru orice acoperire deschisă $\mathcal{V}$ pentru X, există o sub familie finită $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}$ ce este o ecoperire pentru X (v. 3.7), evident mai fină decît $\mathcal{V}$ şi local finită. Orice submulţime închisă a unui spaţiu paracompact este un spaţiu paracompact în topologia relativă. Suma oricărei familii de spaţii paracompacte este un spaţiu paracompact. Menţionăm de asemenea rezultatul, după care orice spaţiu Hausdorff local compact X, <u>numărabil la infinit</u> (adică X este o uniune numărabilă de subspaţii compacte), este paracompact, şi o teoremă a lui Dieudonné, după care orice spaţiu paracompact este normal. Pentru demonstraţia acestor rezultate, cititorul poate consulta [34], pp.70-78. Un exemplu important de spaţiu Hausdorff local compact numărabil la infinit îl constituie $\mathbb{R}^n$, căci $\mathbb{R}^n$ este uniunea celulelor închise (submulţimi compacte) de rază $\sqrt{n}$, centrele acestor celule fiind punctele cu toate coordonatele întregi, uniune ce este evident numărabilă. Prin urmare, spaţiul $\mathbb{R}^n$ este paracompact. Atragem atenţia că, în general, produsul topologic a două spaţii paracompacte nu este paracompact (v. [33] şi [8], pp. 114-115). Cu alte cuvinte, proprietatea unui spaţiu topologic de a fi paracompact nu este multiplicativă. In sfîrşit, să mai

amintim o teoremă a lui A.H.Stone [33] , după care orice spaţiu metrizabil este paracompact. In particular, orice spaţiu Hausdorff local compact cu bază finită sau numărabilă, fiind metrizabil [v.observaţia 5.65,1)] , este paracompact. Din acelaşi motiv, orice spaţiu vectorial normat este paracompact.

Importanţa spaţiilor paracompacte constă în aceea că admit partiţie continuă (în unele situaţii, chiar diferenţiabilă) a unităţii (pentru detalii, v. [34] ,pp.78-81). Partiţiile unităţii constituie singura metodă cunoscută de globalizare a aplicaţiilor locale (cu valori în spaţii topologice cu structuri adiţionale, anume în fibrări vectoriale). Din acest motiv, spaţiile paracompacte sînt frecvent întîlnite în topologia diferenţială şi geometria diferenţială (globală).

3) In cadrul acestui capitol am văzut că anumite proprietăţi de separaţie ale unui spaţiu topologic implică alte asemenea proprietăţi. Aceste implicaţii pot fi reunite în următoarea diagramă :



Sensul săgeţilor indică trecerea de la un spaţiu mai puţin general la altul mai general.

C A P I T O L U L V I

SPATII TOPOLOGICE CONEXE SI SPATII TOPOLOGICE CONEXE PRIN ARCE

Spaţii topologice conexe

6.1. Definiţie. Fie $(X,\mathcal{T})$ un spaţiu topologic $(X,\mathcal{T})$ se numeşte conex dacă singurele mulţimi ale lui X care sînt în acelaşi timp deschise şi închise sînt $\emptyset$ şi X.

Ca o aplicaţie a acestei definiţii să dovedim următoarea afirmaţie de unicitate.

6.2. Propoziţie. Fie X un spaţiu topologic Hausdorff Y un spaţiu topologic conex $(Y \neq \emptyset)$ şi $f:X \longrightarrow Y$ o aplicaţie continuă surjectivă. Dacă $g,h:Y \longrightarrow X$ sînt secţiuni continue ale lui f astfel încît g să fie aplicaţie deschisă şi să existe $y_0 \in Y$ cu proprietatea $g(y_0)=h(y_0)$, atunci $g=h$.

Demonstraţie. Fie $A = \{ y \in Y \mid h(y)=g(y) \}$. Deoarece X este un spaţiu Hausdorff, A este o submulţime închisă a lui Y (v.5.8). Ţinînd seama că g şi h sînt secţiuni ale lui f, egalitatea $h(y)=g(y')$ are loc numai dacă $y=y'$. Din această observaţie rezultă că $A=\{ y \in Y \mid h(y)=g(y') \text{ pentru un } y' \in Y \} = h^{-1}(g(Y))$. Faptul că g este o aplicaţie deschisă şi h este continuă implică atunci că A este o submulţime deschisă a lui Y. Dar $A \neq \emptyset$, căci $y_0 \in A$. Deoarece Y este conex, rezultă atunci $A=Y$, adică $h=g$.

Q. E. D.

6.3. Propoziţie. Un spaţiu topologic $(X,\mathcal{T})$ este conex dacă şi numai dacă X nu se poate exprima ca uniunea a două mulţimi deschise, disjuncte şi nevide.

Demonstrație. Să presupunem că $(X,\mathcal{T})$ este conex și că $X=D_1 \cup D_2$, unde $D_1 \neq \emptyset$, $D_2 \neq \emptyset$, $D_1, D_2 \in \mathcal{T}$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Atunci $D_1 = D_2'$, așa încît D_1 este deschisă și închisă în X. Deoarece X este conex, $D_1 = \emptyset$ sau $D_1 = X$. Dacă $D_1 = X$, atunci $D_2 = \emptyset$, așa încît în ambele cazuri, fie D_1, fie D_2 trebuie să fie $\emptyset$, ceea ce contrazice $D_1 \neq \emptyset$, $D_2 \neq \emptyset$.

Reciproc, să presupunem că X nu se poate exprima ca uniunea a două mulțimi deschise, disjuncte și nevide. Fie $D \subset X$ o mulțime ce este în același timp deschisă și închisă. Atunci D' este atît deschisă cît și închisă și $X = D \cup D'$. In baza ipotezei fie $D = \emptyset$, fie $D' = \emptyset$, adică fie $D = \emptyset$, fie $D = X$. Deci $(X,\mathcal{T})$ este conex.

Q. E. D.

6.4. Definiție. Fie $(X,\mathcal{T})$ un spațiu topologic și $S \subset X$. Submulțimea S se numește conexă dacă $(S,\mathcal{T}_S)$ este un spațiu topologic conex.

6.5. Definiție. Dacă $(X,\mathcal{T})$ este un spațiu topologic și X se poate exprima ca uniunea disjunctă a două mulțimi deschise nevide D_1 și D_2, adică $X = D_1 \cup D_2$, $D_1, D_2 \in \mathcal{T}$, $D_1 \neq \emptyset$ $D_2 \neq \emptyset$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, atunci $\{D_1, D_2\}$ se numește o partiție a lui $(X,\mathcal{T})$.

Evident, dacă există o partiție a spațiului topologic $(X,\mathcal{T})$, atunci $(X,\mathcal{T})$ nu este conex.

6.6. Exemple 1) Submulțimea $\{0,1\}$ a lui $\mathbb{R}$ nu este conexă. Deci sfera o-dimensională $S^0 = \{-1,1\}$ nu este conexă.

In adevăr, dacă $D_1 = \{0\}$, $D_2 = \{1\}$, atunci $\{0,1\} = D_1 \cup D_2$, $D_1 \neq \emptyset$, $D_2 \neq \emptyset$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. D_1 este o submulțime deschisă a lui $\{0,1\}$ căci $D_1 = \{0,1\} \cap (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

2) Mai general, orice mulţime finită ce conţine cel puţin două elemente dotată cu topologia discretă nu este un spaţiu topologic conex. In schimb spaţiul ce conţine un singur punct este conex. In particular, spaţiul proiectiv real 0-dimensional $\mathcal{P}\mathbb{R}^0$ este conex v.2.73,6) .

3)Mulţimea (hiperbola) $H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2-y^2=1\}\subset\mathbb{R}^2$ nu este conexă. In adevăr, dacă notăm $D_1=\{(x,y)\in H \mid x>0\}$, $D_2=\{(x,y)\in H \mid x<0\}$, atunci $\{D_1,D_2\}$ este o partiţie a lui H. Să verificăm această afirmaţie. $(1,0)\in D_1$, $(-1,0)\in D_2$, deci $D_1\neq\emptyset$, $D_2\neq\emptyset$. $H=D_1\cup D_2$ căci dacă substituim $x=0$ în ecuaţia lui H, ecuaţia $y^2=-1$ nu are soluţii reale. In sfîrşit, să observăm că $D_1=H\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0\}$ şi $D_2=H\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x<0\}$, adică D_1 şi D_2 sînt deschise, în H.

4) $\mathbb{R}\setminus\{0\}\subset\mathbb{R}$ nu este conexă, căci $\{(-\infty,0),(0,\infty)\}$ este o partiţie a lui $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

5) Fie $\operatorname{card}(T)\geq 2$ şi $\{(X_t,\mathcal{T}_t)\}_{t\in T}$ o familie de spaţii topologice nevide. Suma $\coprod_{t\in T} X_t$ a acestei familii de spaţii topologice (v.2.14) nu este un spaţiu topologic conex. Acest fapt este o consecinţă imediată a lui 2.15.

Spaţiul topologic discret $\{0,1\}$ (sau, mai general, format din două elemente distincte) este tipic pentru spaţiile topologice ce nu sînt conexe, în sensul rezultatului următor.

6.7 <u>Propoziţie</u>. Spaţiul topologic $(X,\mathcal{T})$ nu este conex dacă şi numai dacă există o aplicaţie continuă surjectivă a lui X pe spaţiul topologic discret $\{0,1\}$.

<u>Demonstraţie</u>. Fie $\{D_0, D_1\}$ o partiţie a spaţiului topologic $(X,\mathcal{T})$. Dacă definim funcţia $f:X\longrightarrow\{0,1\}$ prin:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{pentru } x\in D_0,\\ 1 & \text{pentru } x\in D_1,\end{cases}$$

atunci f este continuă, căci $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\{0\})=D_0$, $f^{-1}(\{1\})=D_1$, $f^{-1}(\{0,1\}) = X$ sînt toate mulţimi deschise din X. Continuitatea lui f putea fi obţinută şi ca o consecinţă imediată a lui 2.61.

Reciproc, dacă $f:X \longrightarrow \{0,1\}$ este o aplicaţie continuă surjectivă, fie $D_0= f^{-1}(\{0\})$, $D_1=f^{-1}(\{1\})$. Atunci $D_0, D_1 \in \mathcal{T}$ căci f este continuă şi $\{0\}$ şi $\{1\}$ sînt deschise în $\{0,1\}$. $D_0 \neq \emptyset$, $D_1 \neq \emptyset$ căci f este surjectivă şi, evident, $X=D_0 \cup D_1$, $D_0 \cap D_1 = \emptyset$.

Q. E. D.

6.8. Exemplu . Grupul ortogonal real O (n) (v.5.13) nu este conex, căci există aplicaţia continuă surjectivă det:O(n) $\longrightarrow \{-1,1\}$.

6.9. Corolar. Spaţiul topologic $(X,\mathcal{T})$ este conex dacă şi numai dacă orice aplicaţie continuă a lui X în spaţiul topologic discret $\{0,1\}$ este constantă.

6.10. Propoziţie. Orice interval mărginit şi închis $[a,b]$ din $\mathbb{R}$ este conex.

Demonstraţie. Procedăm prin reducere la absurd, adică presupunem că mulţimea $[a,b] \subset \mathbb{R}$ nu este conexă. In acest caz există o aplicaţie continuă surjectivă $f: [a,b] \longrightarrow \{0,1\}$ (v. 6.7) . Fără a restrînge generalitatea putem presupune că f(b)=1, căci în caz contrar n-avem decît, în loc de f, să considerăm funcţia $g: [a,b] \longrightarrow \{0,1\}$, g(x)=1-f(x). Prin ipoteză, f ia şi valoarea 0 şi fie $\xi = \sup \{ x \in [a,b] \mid f(x)=0 \}$. Deoarece f este continuă în ξ , există $\delta > 0$ astfel încît dacă $|x-\xi| < \delta$, $x \in [a,b]$, să avem $|f(x)-f(\xi)|<1$. Cum f ia numai valorile 0 şi 1, aceasta implică $f(x)=f(\xi)$. Dacă $\xi = b$, atunci prin ipoteză $f(\xi)=1$. Dacă $\xi < b$, a-

tunci $f(x)=1$ pentru orice $x \in (\xi, b]$, aşa încît $f(\xi)=1$. Pe de altă parte, să observăm că dacă $\xi > a$, atunci din definiţia lui ξ rezultă că există $x \in (\xi - \delta, \xi)$ astfel încît $f(x)=0$, ceea ce implică $f(\xi)=0$. Dacă $\xi = a$, atunci $f(\xi)=0$, căci în acest caz $f(x) = 1$ pentru orice $x \in (a,b]$ şi f ia, prin ipoteză, ambele valori 0 şi 1. Prin urmare, am găsit un punct $\xi \in [a,b]$ astfel încît f ia în ξ atît valoarea 0 cît şi valoarea 1, ceea ce este imposibil [v.1.14(2)].

Q. E. D.

6.11. Corolar. O submulţime nevidă C a lui $\mathbb{R}$ ce conţine mai mult decît un punct este conexă dacă şi numai dacă C este un interval, adică dacă şi numai dacă C este convexă. In particular, spaţiul topologic $\mathbb{R}$ este conex.

Demonstraţie. Să presupunem întîi C convexă şi că C conţine mai mult decît un punct. Fie $f: C \longrightarrow \{0,1\}$ o aplicaţie continuă arbitrară. Atunci pentru orice $a,b \in C$ $(a < b)$, $[a,b] \subset C$ şi $f|_{[a,b]}: [a,b] \longrightarrow \{0,1\}$ este continuă. Deoarece $[a,b]$ este conex, $f|_{[a,b]}$ este constantă, aşa încît în particular $f(a)=f(b)$, adică f este constantă. Deci C este conexă.

Reciproc, să presupunem că C este conexă (C conţine mai mult decît un punct) dar C nu este convexă. In mod necesar C este atunci infinită [v.6.6,2)], deci există $a,b \in C$ şi $c \in \mathbb{R} \setminus C$ astfel încît $a < c < b$. Fie $D_1 = C \cap (-\infty, c)$ şi $D_2 = C \cap (c, +\infty)$. Atunci D_1 şi D_2 sînt deschise, $a \in D_1$, $b \in D_2$, adică $D_1 \neq \emptyset$, $D_2 \neq \emptyset$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ şi $D_1 \cup D_2 = C$, adică C nu este conexă, ceea ce contrazice ipoteza.

Q. E. D.

6.12. Corolar. Fie X un spaţiu topologic nevid cu proprietatea că pentru orice $x,y \in X$, $x \neq y$, există o aplicaţie continuă $f: [0,1] \longrightarrow X$ astfel încît $f(0)=x$ şi $f(1)=y$. Atunci X este conex.

Demonstraţie. Presupunem că X nu ar fi conex, adică să admitem că există o aplicaţie continuă surjectivă $g: X \longrightarrow \{0,1\}$ Atunci există $x_0, x_1 \in X$, $x_0 \neq x_1$, astfel încît $g(x_0)=0$ şi $g(x_1)=1$. In baza ipotezei, există o aplicaţie continuă $h: [0,1] \longrightarrow X$ astfel încît $h(0)=x_0$ şi $h(1) = x_1$. In acest caz aplicaţia $g|_{h([0,1])} \circ h: [0,1] \longrightarrow \{0,1\}$ este continuă şi surjectivă, adică $[0,1]$ nu este conex (v.6.7) , ceea ce contrazice 6.10.

Q. E. D.

6.13. Exemple. 1) Spaţiul topologic $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ este conex pentru $n \geq 2$. In adevăr, dacă $x,y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $x \neq y$, sînt astfel încît segmentul determinat de aceste puncte nu conţine originea lui $\mathbb{R}^n$, atunci există aplicaţia continuă $f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $f(t) = (1-t)x + ty$, cu proprietatea $f(0)=x$ şi $f(1) = y$. Dacă x,y $(x \neq y)$ sînt astfel încît segmentul determinat de aceste puncte conţine originea lui $\mathbb{R}^n$, atunci există un punct $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $z \neq x$, $z \neq y$, cu proprietatea că segmentele determinate de x,z şi respectiv z,y sînt incluse în $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Atunci există aplicaţia continuă $g: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

$$g(t) = \begin{cases} (1-2t)x+2tz & \text{dacă } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] , \\ (2-2t)z+(2t-1)y & \text{dacă } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] , \end{cases}$$

astfel încît $g(0) = x$ şi $g(1) = y$.

Procedînd în acelaşi mod se poate dovedi o proprietate şi mai generală. Anume, dacă E este o mulţime finită sau numărabilă din $\mathbb{R}^n$, atunci $\mathbb{R}^n \setminus E$, cu topologia indusă de $\mathbb{R}^n$,

este un spaţiu conex (v. de exemplu [9] , p.134).

2) Orice mulţime nevidă convexă C dintr-un spaţiu vectorial normat real E este conexă. In adevăr, dacă C conţine un singur element, acest lucru este evident [v.6.6.2)] . Dacă C conţine mai mult de un element şi $u,v \in C$, $u \neq v$, aplicaţia continuă $f: [0,1] \longrightarrow C$, $f(t)=(1-t)u + tv$ se bucură de proprietatea $f(0) =u$, $f(1) = v$. In particular, orice celulă deschisă (închisă) din E este conexă.

6.14. Propoziţie. Fie X,Y spaţii topologice şi $f:X \longrightarrow Y$ o aplicaţie continuă surjectivă. Dacă X este conex, atunci şi Y este conex.

Demonstraţie. Procedăm prin reducerea la absurd. Presupunem deci că Y nu este conex. Ţinînd seama de 6.7, există atunci o aplicaţie continuă surjectivă $g:Y \longrightarrow \{0,1\}$. In acest caz aplicaţia $g \circ f : X \longrightarrow \{0,1\}$ este continuă şi surjectivă, de unde rezultă că X nu este conex (v.6.7), ceea ce contrazice ipoteza.

Q. E. D.

6.15. Exemple. 1) Pentru $n \geqslant 1$, sfera unitate S^n este conexă. In adevăr, n-avem decît să observăm că pentru $n \geqslant 1$, $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ este un spaţiu conex [v.6.13,1)] şi că aplicaţia $f: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow S^n$, $f(x) = \frac{x}{\|x\|}$, $x=(x^1,\ldots,x^{n+1})$, este continuă şi surjectivă. Conexitatea lui $S^n (n \geqslant 1)$ este atunci o consecinţă imediată a lui 6.14. Utilizînd cele stabilite la 6.12 propunem cititorului să dea o altă motivaţie a conexităţii lui S^n pentru $n \geqslant 1$.

2) Fie $GL(\mathbb{R}^n)$ [resp. $GL(\mathbb{C}^n)$] mulţimea matricilor pătratice de ordinul n nesingulare ale căror elemente sînt din $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Atunci $GL(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ şi $GL(\mathbb{C}^n) \subset \mathbb{C}^{n^2}$, deci $GL(\mathbb{R}^n)$ [resp. $GL(\mathbb{C}^n)$] este un subspaţiu topologic al lui

$\mathbb{R}^{n^2}$ (resp. $\mathbb{C}^{n^2}$). Aplicaţia determinant $\det : \mathbb{R}^{n^2} = \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n$ (n ori) $\longrightarrow \mathbb{R}$, fiind n-liniară, este continuă [v.2.49,6),(b)]. Deoarece aplicaţia $\det_{|GL(\mathbb{R}^n)} : GL(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ este continuă şi surjectivă şi $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ nu este conex [v.6.6.4)], spaţiul topologic $GL(\mathbb{R}^n)$ nu poate fi conex (v.6.14). Să observăm că această justificare nu mai este valabilă în cazul lui $GL(\mathbb{C}^n)$, căci aplicaţia $\det_{|GL(\mathbb{C}^n)} : GL(\mathbb{C}^n) \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ este continuă şi surjectivă, dar $\mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ este conex. Utilizînd tehnici mai fine, se poate arăta că $GL(\mathbb{C}^n)$ satisface ipotezele din 6.12 (v. [10] , p.153), adică $GL(\mathbb{C}^n)$ este conex.

6.16. Corolar. Dacă $f : X \longrightarrow Y$ este un homeomorfism, atunci X este conex dacă şi numai dacă Y este conex.

6.17. Corolar. Dacă $(X,\mathcal{T})$ este un spaţiu topologic conex şi R este o relaţie de echivalenţă pe X, atunci $(X/_R, \mathcal{T}/R)$ este conex.

In adevăr, proiecţia canonică $q:X \longrightarrow X/R$ este o surjecţie continuă (v.2.66).

6.18. Exemplu. Spaţiul proiectiv real m-dimensional $P\mathbb{R}^m$ ($m \geq 0$) este conex. Pentru m=o am văzut deja acest lucru [v. 6.6,3)] . Dacă $m \geq 1$, n-avem decît să observăm că $P\mathbb{R}^m$ este spaţiul topologic cît al lui $\mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}$ în raport cu relaţia de echivalenţă R_1 definită la 2.70 şi că $\mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}$ este conex [v.6.13,1)] .

6.19. Corolar. Dacă $f:X \longrightarrow Y$ este o aplicaţie continuă şi $A \subseteq X$ este o submulţime conexă, atunci f(A) este conexă. Prin urmare, proprietatea unei mulţimi dintr-un spaţiu topologic de a fi conexă este topologică [v.2.72,4)] .

Raţionamentul care stă la baza motivării acestei afirmaţii este complet similar cu cel utilizat în demonstraţia lui 3.18.

6.20. Corolar. Fie $(X,\mathcal{T})$ un spaţiu topologic nevid conex, $f:X \longrightarrow \mathbb{R}$ o aplicaţie continuă neconstantă şi $a,b \in f(X)$ $a < b$. Atunci $[a,b] \subset f(X)$ (acest rezultat este cunoscut sub numele de teorema valorii intermediare). In particular, dacă $f:[c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţie continuă neconstantă şi dacă există $x_1, x_2 \in [c,d]$ astfel încît $f(x_1) > 0$ şi $f(x_2) < 0$, atunci există $x_0 \in [c,d]$ astfel încît $f(x_0) = 0$.

In adevăr, $f(X)$ este conexă şi prin urmare convexă (v. 6.11).

6.21. Propoziţie. Fie X un spaţiu topologic şi A o submulţime conexă a lui X. Atunci $\bar{A}$ este conexă. Mai general, orice submulţime B a lui X cu proprietatea $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ este conexă.

Demonstraţie. Orice aplicaţie continuă $f:\bar{A} \longrightarrow \{0,1\}$ este constantă pe A, deci şi pe $\bar{A}$ (v.5.9), căci $\{0,1\}$ cu topologia discretă este un spaţiu Hausdorff (v.5.6). In particular, orice aplicaţie continuă $f:B \longrightarrow \{0,1\}$ este constantă pe A, deci poate fi prelungită la o aplicaţie constantă pe $\bar{A}$, aşa încît f este constantă şi pe B.

Q. E. D.

6.22. Corolar. Dacă un spaţiu topologic X conţine o mulţime conexă A densă în X, atunci X este conex.

In adevăr, în baza lui 6.21, $\bar{A} = X$ este conex.

6.23. Exemplu. Submulţimea $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ şi } y = \sin \frac{1}{x}\right\} \subset \mathbb{R}^2$ este conexă, căci este homeomorfă cu $\mathbb{R}$ (v.6.16) aşa încît aderenţa sa

$$\bar{A} = A \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ şi } |y| \leq 1\}$$

estem de asemenea, conexă.

6.24. Propoziţie. Fie X un spaţiu topologic nevid A_0 şi

$\{A_t\}_{t\in T}$ submulţimi conexe ale lui X, $T \neq \emptyset$. Dacă $A_0 \cap A_t \neq \emptyset$ pentru orice $t\in T$, atunci $A_0 \cup (\bigcup_{t\in T} A_t)$ este conexă.

Demonstraţie. Fie $f: A_0 \cup (\bigcup_{t\in T} A_t) \longrightarrow \{0,1\}$ o aplicaţie continuă arbitrară, $a\in A_0 \cup (\bigcup_{t\in T} A_t)$ un punct fixat şi $x\in A_0 \cup (\bigcup_{t\in T} A_t)$ un punct arbitrar. Să presupunem întîi că $x\in A_0$. Dacă $a\in A_0$, atunci $f(x) = f(a)$, căci $f|_{A_0}$ este o aplicaţie constantă. Să presupunem acum că $a\in A_{t_0}$, $t_0\in T$. In baza ipotezei, există $a_1 \in A_0 \cap A_{t_0}$. Deoarece A_{t_0} este conexă, $f|_{A_{t_0}}$ este constantă, aşa încît $f(a) = f(a_1)$. Dar şi A_0 este conexă, adică $f|_{A_0}$ este constantă, deci $f(a_1) = f(x)$. Prin urmare, şi în acest caz $f(x)=f(a)$. Să presupunem apoi că $x\in A_t$. Dacă $a\in A_0$ atunci procedînd în acelaşi mod ca mai sus rezultă $f(x) = f(a)$. Să presupunem atunci $a\in A_{t_0}$. In baza ipotezei, există $a_1\in A_0 \cap A_{t_0}$ şi $a_2 \in A_0 \cap A_t$. Deoarece A_{t_0} şi A_t sînt conexe, rezultă respectiv $f(a) = f(a_1)$ şi $f(x) = f(a_2)$. Ţinînd acum seama că şi A_0 este conexă, obţinem $f(a_1) = f(a_2)$, adică $f(x)=f(a)$. Deci f este constantă şi $A_0 \cup (\bigcup_{t\in T} A_t)$ este conexă (v.6.9).

Q. E. D.

6.25. Exemplu. Fie $X=\mathbb{R}^2$ şi submulţimile conexe $A_0 = [-1,1]$, $A_n = \{ x\in\mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1-\frac{1}{n} \}$, $n=1,2,\ldots$ şi $A_\infty = \{ x\in\mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1 \}$ din $\mathbb{R}^2$ [v.6.15,1)]. Deci în acest caz $T = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Deoarece $A_0 \cap A_n = \{(\frac{1}{n}-1,0), (1-\frac{1}{n},0)\} \neq \emptyset$, $\forall n = 1,2,\ldots$, $A_0 \cap A_\infty = \{(-1,0),(1,0)\} \neq \emptyset$, rezultă că $A_0 \cup (\bigcup_{t\in T} A_t)$ este o submulţime conexă a lui $\mathbb{R}^2$.

6.26. Corolar. Fie X un spaţiu topologic nevid şi $\{A_t\}_{t\in T}$, $T \neq \emptyset$, o familie de submulţimi conexe din X.

Dacă $\bigcap_{t\in T} A_t \neq \emptyset$, atunci $\bigcup_{t\in T} A_t$ este o submulţime conexă.

In adevăr, fie $t_0 \in T$ fixat şi să notăm $A_0 = A_{t_0}$. Atunci $A_0 \cap A_t \neq \emptyset$ pentru orice $t \in T$, căci $\bigcap_{t\in T} A_t \neq \emptyset$

6.27. Exemplu. Ţinînd seama de faptul că dreptele din $\mathbb{R}^n$ sînt conexe, putem utiliza 6.26 pentru a dovedi că $\mathbb{R}^n$ este conex pentru $n \geq 2$. In adevăr, fie $\{A_t\}_{t\in T}$ mulţimea tuturor dreptelor din $\mathbb{R}^n$ ce trec prin $o \in \mathbb{R}^n$ (drept mulţime T de indexare poate fi luată sfera unitate din $\mathbb{R}^n$). Atunci $\bigcap_{t\in T} A_t = \{o\} \neq \emptyset$ şi $\mathbb{R}^n = \bigcup_{t\in T} A_t$, aşa încît $\mathbb{R}^n$ este conex.

6.28. Corolar. Fie S o submulţime nevidă a spaţiului topologic nevid X şi fie $\{A_t\}_{t\in T}$ familia tuturor submulţimilor conexe ale lui X ce conţin pe S. Reuniunea $C = \bigcup_{t\in T} A_t$ este un subspaţiu închis şi conex al lui X ce conţine pe S.

Demonstraţie. Deoarece $\bigcap_{t\in T} A_t \supseteq S \neq \emptyset$, conexitatea lui C este o consecinţă imediată a lui 6.26. Să observăm că $S \subseteq C \subseteq \overline{C}$. Pe de altă parte, deoarece reuniunea C este conexă, $\overline{C}$ este de asemenea conexă (v.6.21). Ţinînd seama că, $S \subseteq \overline{C}$, rezultă că există $t_0 \in T$ astfel încît $\overline{C} = A_{t_0}$, ceea ce implică $\overline{C} \subseteq C$, adică $C = \overline{C}$.

Q. E. D.

Reuniunea C este deci cea mai mare submulţime conexă a lui X ce conţine pe S. Dacă S este conexă, C este o submulţime conexă maximală (în raport cu relaţia de incluziune) a lui X. Această observaţie justifică următoarea definiţie:

6.29. Definiţie. O componentă conexă a unui spaţiu topologic nevid X este o submulţime conexă maximală a lui X.

Dacă $(X, \mathcal{T})$ este un spaţiu topologic şi $A \subset X$, atunci printr-o componentă conexă a lui A se înţelege o componentă conexă a spaţiului topologic $(A, \mathcal{T}_A)$.

In ipotezele lui 6.28 şi dacă S este conexă se mai zice că C este componentă conexă a lui S în X.

6.30. Observaţii. 1) O componentă conexă C a lui X este închisă. In adevăr, dacă C n-ar fi închisă, atunci $C \subset \overline{C}$ şi conexitatea lui $\overline{C}$ (v. 6.21), ar contrazice atunci maximalitatea lui C.

2) Relaţia binară R' definită pe spaţiul topologic nevid X prin: dacă $x,y \in X$, $xR'y$ dacă şi numai dacă există o submulţime conexă a lui X ce conţine x şi y, este o relaţie de echivalenţă pe X ale cărei clase de echivalenţă sînt componentele conexe ale lui X. In adevăr, $xR'x$, căci $x \in \{x\}$ şi $\{x\}$ este conexă. Simetria relaţiei R' este imediată. Dacă $xR'y$ şi $yR'z$, există submulţimile conexe A_1 şi A_2 ale lui X astfel încît $x,y \in A_1$, $y,z \in A_2$. Deci $A_1 \cap A_2 \supseteq \{y\}$ şi $A_1 \cup A_2$ este atunci conexă (v.6.26). Dar $x,z \in A_1 \cup A_2$, aşa încît $xR'z$ Evident, clasa de echivalenţă a lui $x \in X$ în raport cu relaţia R' este componenta conexă a lui $\{x\}$ în X.

3) Două componente conexe distincte ale lui X sînt disjuncte. In adevăr, această afirmaţie este o consecinţă imediată a observaţiei precedente. Se poate da însă şi o justificare directă: dacă C_1, C_2 sînt două componente conexe distincte ale lui X şi $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$, atunci reuniunea $C_1 \cup C_2$ este conexă (v. 6.26) şi $C_1, C_2 \subset C_1 \cup C_2$, ceea ce contrazice maximalitatea lui C_1 şi respectiv C_2.

6.31. Definiţie. Un spaţiu topologic X se numeşte local conex dacă pentru orice $x \in X$ şi orice mulţime deschisă D ce conţine punctul x, există o mulţime deschisă conexă D_1 astfel încît $x \in D_1 \subseteq D$.

De exemplu, $\mathbb{R}^n$ este un spaţiu local conex. Mai general, orice spaţiu metric este local conex, căci orice celulă deschisă

este conexă (v. şi consideraţiile ce preced 3.28). Ultima afirmaţie este o consecinţă imediată a lui 3.42,2) şi 6.13,2).

6.32. Observaţii. 1) Un spaţiu topologic poate fi conex, fără a fi local conex. De exemplu, spaţiul topologic $\bar{A}$ considerat la 6.23 este conex, dar nu este local conex. In adevăr, dacă $(x,y) \in \bar{A}$ are proprietatea $x=0$ şi $|y| \leq 1$, nu există nici o mulţime deschisă conexă din $\bar{A}$ ce conţine (x,y). Un alt exemplu de spaţiu conex ce nu este local conex este oferit de cel considerat la 6.25, căci dacă $x \in A_\infty \setminus \{(-1,0), (1,0)\}$, nu există nici o mulţime deschisă conexă din $A_0 \cup (\bigcup_{t \in T} A_t)$ ce conţine x.

2) Un spaţiu topologic X poate fi local conex, fără a fi conex. De exemplu spaţiul topologic discret $\{0,1\}$ este local conex dar nu este conex [v.6.6,1)] .

3) Orice produs topologic finit de spaţii local conexe este local conex.

6.33. Propoziţie. Un spaţiu topologic $(X, \mathcal{T})$ este local conex dacă şi numai dacă oricare ar fi $D \in \mathcal{T}$, orice componentă conexă a lui $(D, \mathcal{T}_D)$ este o mulţime deschisă din X.

Demonstraţie. Condiţia este suficientă: fie $x \in X$ şi $D \in \mathcal{T}$ astfel încît $x \in D$. Atunci componenta conexă D_1 a lui $(D, \mathcal{T}_D)$ ce conţine punctul x este deschisă în X, conexă [căci $(\mathcal{T}_D)_{D_1} = \mathcal{T}_{D_1}$, v.2.12] şi $x \in D_1 \subseteq D$. Condiţia este necesară : fie $D \in \mathcal{T}$, $D \neq \emptyset$, din spaţiul topologic local conex X, C_1 o componentă conexă a lui $(D, \mathcal{T}_D)$ şi $x \in C_1$. Atunci există o mulţime conexă $D_1 \in \mathcal{T}$ astfel încît $x \in D_1 \subseteq D$. Reuniunea $C_1 \cup D_1 \subseteq D$ este conexă, (v.6.26) aşa încît $D_1 \subseteq C_1$, ceea ce arată că C_1 este deschisă [v.2.5,7)] .

Q. E. D.

Din 6.30,1) şi 6.33 rezultă imediat următoarea consecinţă

6.34. Corolar. Dacă X este un spaţiu topologic local conex, atunci orice componentă conexă a lui X este deschisă şi închisă în X.

Prin urmare, un spaţiu topologic local conex poate fi considerat ca suma topologică a componentelor sale conexe.

Să observăm că dacă un spaţiu topologic este compact şi local conex, atunci numărul componentelor sale conexe este finit. In adevăr, n-avem decît să remarcăm că mulţimea componentelor conexe ale unui spaţiu topologic local conex X formează o acoperire deschisă pentru X.

Afirmaţiile a) şi b) din propoziţia ce urmează arată că proprietatea unui spaţiu topologic de a fi local conex este locală.

6.35. Propoziţie. a) Dacă $(X,\mathcal{T})$ este un spaţiu topologic local conex, atunci oricare ar fi $D \in \mathcal{T}$, $(D,\mathcal{T}_D)$ este local conex.

b) Fie $\{D_t\}_{t\in T}$ o familie de mulţimi deschise din spaţiul topologic $(X,\mathcal{T})$, $T \neq \emptyset$, astfel încît $(D_t,\mathcal{T}_{D_t})$ să fie local conex pentru orice $t\in T$. Dacă $X = \bigcup_{t\in T} D_t$, atunci X este local conex.

Demonstraţie. a) Putem presupune $D \neq \emptyset$. Fie $x\in D$ şi $A \in \mathcal{T}_D$ astfel încît $x\in A$. Atunci $A \in \mathcal{T}$ (v.2.11), deci în baza ipotezei există o mulţime conexă $D_1 \in \mathcal{T}$ cu proprietatea $x\in D_1 \subseteq A$. Dar $D_1 \in \mathcal{T}_D$, aşa încît $(D,\mathcal{T}_D)$ este local conex.

b) Putem presupune $X \neq \emptyset$. Fie $x\in X$ şi $D \in \mathcal{T}$ astfel încît $x\in D$. Atunci există $t\in T$ astfel încît $x\in D_t$. Deoarece $D \cap D_t \in \mathcal{T}_{D_t}$ şi $x\in D \cap D_t$, există o mulţime conexă $A \in \mathcal{T}_{D_t}$ cu proprietatea $x\in A \subseteq D \cap D_t \subseteq D$. Apar-

tenenţele $A \in \mathcal{T}_{D_t}$ şi $D_t \in \mathcal{T}$ implică $A \in \mathcal{T}$, adică X este local conex.

Q. E. D.

Să revenim acum la spaţiile topologice conexe şi să dovedim următorul fapt remarcabil: conexitatea este o proprietate multiplicativă.

6.36. Propoziţie. Fie $\{ X_t \}_{t \in T}$, $T \neq \emptyset$, o familie arbitrară de spaţii topologice nevide. Atunci $\prod_{t \in T} X_t$ este conex dacă şi numai dacă pentru orice $t \in T$, X_t este conex.

Demonstraţie. Să presupunem că $\prod_{t \in T} X_t$ este conex. Deoarece pentru orice $t_o \in T$, $p_{t_o} : \prod_{t \in T} X_t \longrightarrow X_{t_o}$ este continuă şi surjectivă [v.4.2,3)], X_{t_o} este conex (v.6.14) Reciproc, să presupunem că X_t este un spaţiu topologic conex pentru orice $t \in T$ şi fie $\chi : \prod_{t \in T} X_t \longrightarrow \{0,1\}$ o aplicaţie continuă arbitrară. Fie $f \in \prod_{t \in T} X_t$, $t_o \in T$ un indice arbitrar şi $\chi_{t_o} : X_{t_o} \longrightarrow \{0,1\}$ aplicaţia continuă definită prin $\chi_{t_o} = \chi|_{A_{f,t_o}} \circ \varphi_{t_o}$, unde $\varphi_{t_o} : X_{t_o} \longrightarrow A_{f,t_o}$ a fost definită la 4.2,6), adică oricare ar fi $x \in X_{t_o}$, $\chi_{t_o}(x) = \chi(g)$ unde $g \in \prod_{t \in T} X_t$ este definită prin

$$g(t) = \begin{cases} x \text{ pentru } t = t_o \\ f(t) \text{ pentru } t \in T \setminus \{t_o\}. \end{cases}$$

Deoarece χ_{t_o} este conex, rezultă că χ_{t_o} este constantă, adică oricare ar fi $x \in X_{t_o}$, $\chi_{t_o}(x) = \chi_{t_o}(f(t_o)) = \chi(f)$ şi $\chi_{t_o}(x) = \chi_{t_o}(h(t_o)) = \chi(h)$ pentru orice $h \in A_{f,t_o}$ [v. notaţiile de la 4.2,6)], ceea ce implică $\chi(h) = \chi(f)$ oricare ar fi $h \in A_{f,t_o}$. Prin inducţie rezultă atunci că $\chi(h) = \chi(f)$ pentru orice $h \in \prod_{t \in T} X_t$ cu proprietatea că $f(t) = h(t)$, ori-

care ar fi $t \in T \setminus T_1$, unde T_1 este o submulţime finită a lui T. Dar mulţimea A_f a aplicaţiilor h cu această proprietate este densă în $\prod_{t\in T} X_t$ [v.4.2,8)]. Deci χ este constantă pe mulţimea A_f care este densă în $\prod_{t\in T} X_t$, aşa încît χ va fi constantă pe $\prod_{t\in T} X_t$ (v.5.9). Ţinînd seama de 6.9. rezultă că $\prod_{t\in T} X_t$ este conex.

Q. E. D.

6.37. Exemple. 1) $\mathbb{R}^n$ este conex. De asemenea, orice celulă închisă sau deschisă din $\mathbb{R}^n$ este conexă.

In adevăr, prima afirmaţie este o consecinţă imediată a lui 6.36 şi 6.11. Cealaltă afirmaţie este o consecinţă a faptului că D^n este homeomorf cu $D^1 x \ldots x D^1$ (n-ori), unde $D^1 = [-1,1]$ [v.2.73,5)] şi a lui 6.10, 6.36 şi 6.16. Aceeaşi motivaţie se poate folosi pentru a arăta că orice celulă deschisă din $\mathbb{R}^n$ este conexă [v.şi 6.13,2)].

2) Hipercilindrul $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ din $\mathbb{R}^{n+1}$ este conex pentru $n \geqslant 2$. Această proprietate rezultă din 6.15,1) şi 6.11, ţinînd seama de 6.36. Prin urmare hiperboloidul de indice n din $\mathbb{R}^{n+1}$ este şi el conex căci este homeomorf cu $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ [v.2.73, 4)].

3) Torul n-dimensional $T^n = S^1 x \ldots x S^1$ (n-ori) este conex, căci S^1 este conex [v.6,35,1)].

4) Torul plin, adică spaţiul produs $D^2 \times S^1$ al discului închis bidimensional D^2 cu cercul S^1, este conex.

In cazul cînd $T = \{1,2\}$, suficienţa condiţiei din 6.36 poate fi concepută ca un caz particular al următoarei propoziţii căci dacă $X_1, X_2 \neq \emptyset$, proiecţia canonică $p_1 : X_1 \times X_2 \longrightarrow X_1$ este o proiecţie topologică [v.4.2,5)].

6.38. Propoziţie. Fie $f : X \longrightarrow Y$ o proiecţie topologică a spaţiului topologic X pe spaţiul topologic conex Y astfel

încît fiecare fibră a lui f să fie conexă, adică pentru fiecare $y \in Y$, $f^{-1}(\{y\})$ este o submulţime conexă a lui X. Atunci X este un spaţiu conex.

Demonstraţie. Fie $h : X \longrightarrow \{0,1\}$ o aplicaţie continuă arbitrară. Deoarece fibrele lui f sînt conexe, restricţia lui h la orice fibră este constantă. Prin urmare există aplicaţia $g:Y \longrightarrow \{0,1\}$ definită pentru orice $y \in Y$ prin formula $g(y)=h(x)$ pentru orice $x \in f^{-1}(\{y\})$. In acest caz rezultă $h = g \circ f$. Deoarece h este continuă şi f este proiecţie topologică, în baza lui 2.80,b), g este continuă şi deci constantă, căci Y este conex. Dacă g este constantă, atunci şi h este constantă, aşa încît X este conex (v.6.9).

Q. E. D.

6.39. Corolar. Fie X un spaţiu topologic şi R o relaţie de echivalenţă pe X. Dacă spaţiul topologic cît X/R este conex şi toate clasele de echivalenţă în raport cu R sînt conexe, atunci X este conex.

In adevăr, n-avem decît să observăm că proiecţia canonică $q:X \longrightarrow X/R$ este o proiecţie topologică şi fibrele lui q sînt tocmai clasele de echivalenţă în raport cu R.

Ca o aplicaţie a celor stabilite în acest paragraf să dovedim că grupul topologic $SO(n) = \{T \in O(n) \mid \det T = 1\} \subset \mathbb{R}^{n^2}$, al rotaţiilor lui $\mathbb{R}^{n+1}$, este conex pentru orice $n=1,2,\ldots$ In acest scop să precizăm întîi cîteva chestiuni în legătură cu grupurile topologice.

6.40. Definiţie. Un grup topologic constă dintr-un grup G şi o topologie pe G astfel încît aplicaţiile

$$G \times G \longrightarrow G, \quad (g,g') \longmapsto g.g',$$

şi

$$G \longrightarrow G, \quad g \longmapsto g^{-1},$$

sînt continue.

De exemplu, orice grup finit, dotat cu topologia discretă, este un grup topologic. De asemenea, orice spaţiu vectorial normat real sau complex, în care operaţia grupală este definită de adunare, este un grup topologic. Dacă V este un spaţiu Banach, atunci mulţimea $GL(V)$ formată din izomorfismele liniare şi continue de la V pe V formează un grup în raport cu operaţia de compunere a izomorfismelor şi în raport cu topologia indusă de incluziunea $GL(V) \subset L(V;V)$ [v. [10] , observaţia 4) de la p.23 şi corolarul de la p.26]. In particular, $GL(\mathbb{R}^n)$ şi $GL(\mathbb{C}^n)$ sînt grupuri topologice. Dacă $n=1$, atunci $GL(\mathbb{R}^n)$ [resp.$GL(\mathbb{C}^n)$ se poate identifica cu $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ [resp. $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$] .

Dacă H este un subgrup al unui grup topologic G, atunci topologia indusă pe H este compatibilă cu structura sa de grup astfel că H este şi el un grup topologic.

Să reamintim că orice subgrup H al grupului G determină o relaţie de echivalenţă R pe G, anume gRg' $(g,g' \in G)$ dacă şi numai dacă $g^{-1}g' \in H$. Spaţiul factor G/R se notează cu G/H, iar clasa de echivalenţă asociată lui $g \in G$ prin relaţia R este mulţimea $gH = \{gh \mid h \in H\}$, numită clasa de echivalenţă la stînga definită de H în G.

6.41. Propoziţie. Fie H un subgrup conex al grupului topologic G şi să presupunem că spaţiul topologic cît G/H este conex. Atunci G este conex.

Demonstraţie. Dacă H este conex, atunci toate clasele de echivalenţă la stînga definite de H în G sînt conexe. In adevăr, pentru orice $g \in G$, $gH = L_g(H)$, unde aplicaţia $L_g : G \to G$, $L_g(g') = gg'$, numită translaţia la stînga definită de g, este homeomorfism. Continuitatea lui L_g este o consecinţă imediată a lui 6.40; de asemenea, L_g este bijecţie şi inversa sa, $L_{g^{-1}}$

este şi ea continuă. Prin urmare, dacă H este conex, atunci şi $L_g(H) = gH$ este conex (v.6.19). Afirmaţia este atunci o consecinţă imediată a lui 6.39.

Q. E. D.

6.42. Propoziţie. Fie G un grup topologic şi fie H un subgrup al lui G. Pentru ca spaţiul topologic cît G/H să fie Hausdorff este necesar şi suficient ca H să fie un subgrup închis al lui G.

Demonstraţie. Fie R relaţia de echivalenţă pe G determinată de H şi $q:G \longrightarrow G/H$ proiecţia canonică. Dacă spaţiul topologic cît G/H este spaţiu Hausdorff, atunci orice submulţime din G/H formată dintr-un singur element este închisă (v.5.5). In particular, dacă $h \in H$, submulţimea $\{[h]_R\}$ este închisă în G/H şi deci $q^{-1}(\{[h]_R\}) = H$ este o submulţime închisă a lui G. Reciproc, este suficient să verificăm că relaţia de echivalenţă R este deschisă [v.2.67,3)] şi graficul ei este o submulţime închisă din G x G, căci atunci în baza lui 5.27 G/R = G/H va fi spaţiu Hausdorff. Dar, dacă D este o mulţime deschisă din G, atunci saturata mulţimii D este reuniunea $\bigcup_{g \in G} gD = \bigcup_{g \in G} L_g(D)$, unde $L_g:G \longrightarrow G$ este translaţia la stînga definită de g. Deoarece L_g este homeomorfism; $L_g(D)$ este o submulţime deschisă din G şi deci $\bigcup_{g \in G} L_g(D)$ va fi şi ea deschisă în G. Prin urmare, în baza celor stabilite la 2.67,3), R este deschisă. Pe de altă parte, să observăm că $\Gamma = \{(g,g') \in G \times G \mid gRg'\} = \{(g,g') \in G \times G \mid g^{-1}g' \in H\} = \Psi^{-1}(H)$, unde $\Psi : G \times G \longrightarrow G$ este aplicaţia continuă definită prin $\Psi(g,g') = g^{-1}g'$. Deoarece H este o submulţime închisă a lui G, $\Psi^{-1}(H) = \Gamma$ este o submulţime închisă a lui G x G (v.2.50).

Q. E. D.

Strîns legat de conceptul de grup topologic este noţiunea de spaţiu omogen.

6.43. Definiţie. Un spaţiu topologic Hausdorff X se numeşte spaţiu omogen pentru un grup topologic G, dacă există o acţiune continuă tranzitivă a lui G pe X, adică o aplicaţie continuă $\mu : G \times X \longrightarrow X$ astfel încît

(1) Pentru orice $x \in X$, $\mu(e,x)=x$ ($e \in G$ este elementul unitate);

(2) Pentru orice $g,g' \in G$ şi orice $x \in X$,

$$\mu(g,\mu(g',x)) = \mu(gg',x) ;$$

(3) Pentru orice $x,y \in X$, există $g \in G$ astfel încît

$$y = \mu(g,x).$$

6.44. Definiţie. Dacă G este un grup topologic şi X un spaţiu topologic nevid, o aplicaţie $\mu : G \times X \longrightarrow X$ ce satisface condiţiile (1) şi (2) din 6.43 se numeşte acţiune continuă la stînga a lui G pe X.

In continuare, fără alte precizări acţiunile vor fi considerate la stînga.

Să observăm mai departe că o acţiune a lui G pe X defineşte o relaţie de echivalenţă R pe X : xRx' ($x,x' \in X$) dacă şi numai dacă există $g \in G$ astfel încît $x' = \mu(g,x)$. Spaţiul topologic cît X/R, notat cu X/G, se numeşte spaţiul orbitelor acţiunii μ. In cazul unei acţiuni continue tranzitive μ, spaţiul orbitelor acţiunii μ se reduce la spaţiul format dintr-un singur punct.

6.45. Exemple. 1) Dacă H este un subgrup al grupului topologic G, atunci H defineşte o acţiune continuă pe spaţiul topologic cît G/H, anume $\mu : H \times G/H \longrightarrow G/H$, $\mu(h,[g]_R) = [hg]_R$, unde R este relaţia de echivalenţă pe G determinată de H, $h \in H$, $g \in G$.

2) Grupul topologic multiplicativ $\mathbb{Z}_2 = \{-1,1\}$ defineşte o acţiune continuă pe sfera S^m, anume $\mu : \mathbb{Z}_2 \times S^m \longrightarrow S^m$, $\mu(\alpha,x) = \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{Z}_2$, $x \in S^m$.

3) Grupul topologic multiplicativ $S^1 = \{u \in \mathbb{C} \mid |u| = 1\}$ defineşte o acţiune continuă pe sfera $S^{2m-1} = \{ z=(z_1,\dots,z_m) \in \mathbb{C}^m \mid \| z \| = (z_1\bar{z}_1+\dots+z_m\bar{z}_m)^{1/2} = 1 \}$, anume $\vartheta : S^1 \times S^{2m-1} \longrightarrow S^{2m-1}$ $\vartheta(u,z) = uz$, unde $uz = (uz_1,\dots,uz_m)$, $u \in S^1$, $z \in S^{2m-1}$.

4) Grupul topologic multiplicativ $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ defineşte o acţiune continuă pe spaţiul topologic $X = \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^{m+1}$, anume $\mu : \mathbb{R}^* \times X \longrightarrow X$, $\mu(\alpha,x) = \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $x \in X$. Spaţiul orbitelor acestei acţiuni coincide cu spaţiul proiectiv real m-dimensional $P\mathbb{R}^m$ (v.2.70). In baza celor stabilite la 2.73,6), $\mathbb{RP}^m$ este homeomorf cu spaţiul orbitelor acţiunii μ definite în exemplul 2) de mai sus.

Similar, grupul topologic multiplicativ $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ defineşte o acţiune continuă pe spaţiul topologic $Y = \mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\} \subset \mathbb{C}^{m+1}$, anume $\vartheta : \mathbb{C}^* \times Y \longrightarrow Y$, $\vartheta(\lambda,y) = \lambda y$, $\lambda \in \mathbb{C}^*, y \in Y$. Spaţiul orbitelor acestei acţiuni este prin definiţie <u>spaţiul proiectiv complex m-dimensional</u>, notat cu $P\mathbb{C}^m$. Procedînd în acelaşi mod ca la 2.70 şi 2.73,6), se poate arăta că $P\mathbb{C}^m$ este homeomorf cu spaţiul topologic cît S^{2m+1}/R, unde R este relaţia de echivalenţă definită pe sfera unitate $S^{2m+1} = \{ z \in \mathbb{C}^{m+1} \mid \| z \| = 1 \}$ prin: $z \, R \, z' (z,z' \in S^{2m+1})$ dacă şi numai dacă există $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $|\lambda| = 1$, astfel încît $z' = \lambda z$. Deci R nu este altceva decît relaţia de echivalenţă pe S^{2m+1} determinată de acţiunea lui S^1 pe S^{2m+1} [v.exemplul 3)], adică S^{2m+1}/R coincide cu spaţiul orbitelor S^{2m+1}/S^1. Deci $P\mathbb{C}^m$ este homeomorf cu S^{2m+1}/S^1. Din aceste consideraţii rezultă imediat că $P\mathbb{C}^m$ este un spaţiu compact (v.3.17) şi conex (v.6.17).

5) Grupul topologic aditiv $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ defineşte o acţiune continuă pe sfera unitate $S^{2m+1} = \{z \in \mathbb{C}^{m+1} \mid \|z\| = 1\}$ de dimensiune $2m+1$. In adevăr, grupul aditiv $\mathbb{Z}_p$ este izomorf cu grupul multiplicativ al rădăcinilor de ordinul p ale unităţii aşa încît dacă ε este o rădăcină primitivă de ordinul p a unităţii (adică orice rădăcină de ordinul p a unităţii este o putere a lui ε), atunci un element al lui $\mathbb{Z}_p$ poate fi identificat cu o putere a lui ε. Acţiunea lui $\mathbb{Z}_p$ pe S^{2m+1} poate fi atunci definită prin aplicaţia $\mu : \mathbb{Z}_p \times S^{2m+1} \longrightarrow S^{2m+1}$, $\mu(\varepsilon^k, z) = \varepsilon^k z$, $z \in S^{2m+1}$. Spaţiul orbitelor $L_p^{2m+1} = S^{2m+1}/\mathbb{Z}_p$ este atunci un spaţiu compact şi conex, numit <u>spaţiul lenticular de dimensiune $2m+1$ şi de grup $\mathbb{Z}_p$</u>. In particular, spaţiul lenticular L_2^{2m+1} nu este altceva decît spaţiul proiectiv real $P\mathbb{R}^{2m+1}$.

6.46. <u>Propoziţie</u>. Fie $\mu : G \times X \longrightarrow X$ o acţiune continuă a grupului topologic G pe spaţiul topologic nevid X. Atunci pentru fiecare $g \in G$, aplicaţia $\mu_g : X \longrightarrow X$, $\mu_g(x) = \mu(g,x)$ este un homeomorfism.

<u>Demonstraţie</u>. Pentru fiecare $g \in G$, aplicaţia $\varphi_g : X \longrightarrow \{g\} \times X$, $\varphi_g(x) = (g,x)$, $x \in X$, este continuă [de fapt chiar un homeomorfism, v. 4.2.6)], aşa încît aplicaţia $\mu_g = \mu \circ \varphi_g$ va fi continuă. Aplicaţia μ_g este bijectivă, căci ea este inversabilă, anume $(\mu_g)^{-1} = \mu_{g^{-1}}$. In adevăr, pentru orice $x \in X$,

$$\mu_g \circ \mu_{g^{-1}}(x) = \mu_g(\mu(g^{-1},x)) = \mu(g, \mu(g^{-1},x)) \overset{(2)}{=}$$

$$= \mu(gg^{-1},x) = \mu(e,x) \overset{(1)}{=} x,$$

şi similar, $\mu_{g^{-1}} \circ \mu_g = 1_X$. Deoarece $(\mu_g)^{-1} = \mu \circ \varphi_{g^{-1}}$, inversa aplicaţiei μ_g este şi ea continuă, adică μ_g este un homeomorfism.

Q. E. D.

Pentru alte detalii legate de acţiuni, cititorul poate consulta [7].

6.47. Corolar. Fie X un spaţiu omogen pentru grupul topologic G şi fie $x,y \in X$. Atunci există un homeomorfism $h:X \longrightarrow X$ astfel încît $h(x)=y$.

In adevăr, cu notaţiile din 6.43,(3), n-avem decît să luăm $h = \mu_g$.

6.48. Exemple 1) Pentru orice $n=0,1,2,\ldots$ sfera unitate S^n este un spaţiu omogen pentru $O(n+1)$. In particular, S^0 este un spaţiu omogen pentru $O(1)$ şi S^1 este un spaţiu omogen pentru $O(2)$. In adevăr, S^n este spaţiu Hausdorff şi aplicaţia $\mu : O(n+1) \times S^n \longrightarrow S^n$, $\mu(T,x)=T(x)$, defineşte o acţiune continuă tranzitivă a lui $O(n+1)$ pe S^n. Continuitatea acţiunii rezultă imediat din continuitatea aplicaţiei biliniare

$$\rho : L(\mathbb{R}^{n+1}; \mathbb{R}^{n+1}) \times \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \rho(T,x)=T(x)$$

[v. notaţiile de la 5.13 şi 2.49,6), (b)]; căci $\mu = \rho|_{O(n+1)\times S^n}$

Similar, se poate arăta că pentru orice $n=1,2,\ldots$ S^n este un spaţiu omogen pentru $SO(n+1)$.

2) Dacă H este un subgrup închis al grupului topologic G, atunci G defineşte o acţiune continuă tranzitivă pe spaţiul Hausdorff cît G/H, anume $\mu : G \times G/H \longrightarrow G/H$, $\mu(g, [g']_R) = [gg']_R$, unde R este relaţia de echivalenţă determinată de subgrupul H pe G (pentru detaliu v. [14], p.21). Deci G/H este un spaţiu omogen pentru G.

6.49. Propoziţie. Fie G un grup topologic, X un spaţiu topologic, X un spaţiu omogen pentru G şi fie $x \in X$. Atunci aplicaţia $\mu_x : G \longrightarrow X$, $\mu_x(g) = \mu(g,x)$, este continuă şi sur-

jectivă, mulţimea $G_x = \{ g \in G \mid \mu(g,x)=x \}$, numită grupul de izotropie al lui x, este un subgrup închis al lui G şi fibrele lui μ_x sînt clasele de echivalenţă la stînga definite de G_x în G, adică $G/R_{\mu_x} = G/G_x$.

Demonstraţie. Pentru fiecare $x \in X$, aplicaţia $\varphi_x : G \to Gx$ $x \{ x \}$, $\varphi_x(g)=(g,x), g \in G$, este continuă [de fapt, chiar un homeomorfism, v.4.2,6)] , aşa încît aplicaţia $\mu_x = \mu \circ \varphi_x$ va fi continuă. Aplicaţia μ_x este surjectivă, căci oricare ar fi $y \in X$, în baza condiţiei (3) din 6.43, există $g \in G$ astfel încît $y=\mu(g,x)=\mu_x(g)$. Pe de altă parte, deoarece $G_x = \mu_x^{-1}(\{x\})$ şi deoarece $\{ x \}$ este închisă în X, X fiind spaţiu Hausdorff (v.5.5), G_x este o submulţime închisă din G. De asemenea, deoarece $\mu(e,x)=x$, rezultă $e \in G_x$. Dacă $g,g' \in G_x$, atunci $\mu(gg',x)=\mu(g,\mu(g',x)) = \mu(g,x)=x$, adică $gg' \in G_x$. Pentru orice $g \in G_x$, $\mu(g^{-1},x)=\mu(g^{-1},\mu(g,x))=\mu(g^{-1}g,x)=\mu(e,x)=x$, adică $g^{-1} \in G_x$. Deci G_x este un subgrup al lui G. In sfîrşit, deoarece μ_x este surjectivă, toate fibrele lui μ_x sînt mulţimi nevide şi pentru orice $g,g' \in G$, $\mu_x(g)=\mu_x(g')$ dacă şi numai dacă $\mu(g,x)=\mu(g',x) \iff \mu_g(x)=\mu_{g'}(x) \iff x=(\mu_g)^{-1}(\mu_{g'}(x)) = \mu_{g^{-1}}(\mu_{g'}(x)) = \mu(g^{-1}g',x) \iff g^{-1}g' \in G_x \iff g' \in gG_x$. Cu alte cuvinte, g este în aceeaşi fibră cu g', dacă şi numai dacă g şi g' sînt în aceeaşi clasă de echivalenţă la stînga definită de G_x în G.

Q. E. D.

6.50. Corolar. Fie X un spaţiu omogen pentru grupul topologic compact G. Atunci, pentru orice $x \in X$, aplicaţia $\tilde{\mu}_x : G/G_x \to X$ este un homeomorfism.

Demonstrație. In adevăr, deoarece G este compact, spațiul topologic cît $G/R_{\mu_x} = G/G_x$ va fi compact (v.3.17). Pe de altă parte, X fiind spațiu Hausdorff, în baza lui 5.16 bijecția continuă $\tilde{\mu}_x : G/G_x \longrightarrow X$ (v.2.68) va fi un homeomorfism.

Q. E. D.

6.51. Corolar. Grupul topologic $SO(n)$ este conex pentru orice $n=1,2,\ldots$

Demonstrație. Aplicînd 6.50 și ținînd seama de cele stabilite la 6.48,1), rezultă că pentru orice $n=1,2,\ldots$ spațiul topologic cît $SO(n+1)/SO(n)$ este homeomorf cu S^n. In adevăr, dacă $x_o \in S^n$ se bucură de proprietatea că există $T \in SO(n+1)$ astfel încît $T(x_0)=x_0$, atunci dreapta vectorială (Δ) determinată de punctul x_0 este fixă în raport cu rotația T a lui $\mathbb{R}^{n+1}$, iar T induce o rotație $\tilde{T}$ în hiperplanul vectorial (π) care este perpendicular pe (Δ), hiperplan ce poate fi identificat cu $\mathbb{R}^n$. Dacă alegem o nouă bază ortonormată în $\mathbb{R}^{n+1}$ astfel încît primii n vectori ai bazei să aparțină lui (π), iar ultimul vector să aparțină lui (Δ), și în raport cu această bază identificăm $\mathbb{R}^{n+1}$ cu $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, atunci $T \in SO(n+1)_{x_0}$ dacă și numai dacă $T=\tilde{T} \times 1_{\mathbb{R}}$, unde $\tilde{T} \in SO(n)$. Cu alte cuvinte, putem deci identifica $SO(n+1)_{x_0}$ cu $SO(n)$ și să considerăm că $SO(n)$ este un subgrup închis al lui $SO(n+1)$. Mai precis, dacă $\tilde{T} \in SO(n)$, atunci $\tilde{T}$ va fi conceput ca un element al lui $SO(n+1)$, definind acțiunea lui $\tilde{T}$ pe $\mathbb{R}^{n+1}$ prin relația $\tilde{T}(x,x_{n+1}) = (\tilde{T}(x),x_{n+1})$, unde $x \in \mathbb{R}^n$. Pentru a arăta acum că $SO(n)$ este conex procedăm prin inducție după n. In primul rînd să observăm că grupul topologic $SO(1)=\{1\}$ este în mod trivial conex. De asemenea, $SO(2)/SO(1)=SO(2)$ este conex, căci este homeomorf cu cercul S^1, care este conex [v.6.15, 1)] . Să presupunem că $SO(k)$ este conex pentru $k=1,\ldots,n$. Deoarece $SO(n+1)/SO(n)$ este homeomorf cu S^n și cum sfera unitate

S^n este conexă pentru $n \geq 1$ [v.din nou 6.15,1)], spaţiul topologic cît $SO(n+1)/SO(n)$ este conex (v.6.16), aşa încît în baza ipotezei inductive şi a lui 6.41, $SO(n+1)$ este conex.

Q. E. D.

Incheiem acest paragraf relativ la proprietăţile de conexitate cu enunţul teoremelor lui Jordan şi Schoenflies, care aşa cum am mai menţionat (v. cap.IV) au constituit momente hotărîtoare în dezvoltarea ideilor geometrice ale topologiei.

Teorema lui Jordan. Fie f o aplicaţie continuă şi injectivă a cercului S^1 în planul $\mathbb{R}^2$. Mulţimea deschisă $\mathbb{R}^2 \setminus f(S^1)$ are două componente conexe, dintre care una este mărginită. Se zice atunci că $f: S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, unde $C = f(S^1)$, este o curbă Jordan în plan şi că, componenta conexă mărginită a lui $\mathbb{R}^2 \setminus f(S^1)$ este interiorul lui C.

Camille Jordan a fost primul care a subliniat că faptul "evident intuitiv" cuprins în afirmaţia de mai sus pretinde demonstraţie. Prima demonstraţie corectă a acestei probleme propuse de Jordan în 1892 a fost dată de O.Veblen în 1905 [36].

Teorema lui Schoenflies. În ipotezele teoremei lui Jordan şi dacă U este componenta conexă mărginită a lui $\mathbb{R}^2 \setminus f(S^1)$, aplicaţia f poate fi prelungită într-un homeomorfism al discului D^2 pe aderenţa $\overline{U} = U \cup f(S^1)$ a lui U.

Spaţii topologice conexe prin arce

6.52. Definiţii. Fie (X, τ) un spaţiu topologic nevid şi $x_0, x_1 \in X$. Se numeşte drum în X cu originea în x_0 şi extremitatea în x_1 o aplicaţie continuă $\alpha : [0,1] \longrightarrow X$ astfel încît $\alpha(0) = x_0$ şi $\alpha(1) = x_1$. In acest caz vom mai spune că α este un drum în X de la x_0 la x_1 sau încă că α este un drum în X ce uneşte x_0 cu x_1. Spaţiul topologic (X, τ) se numeşte conex prin arce dacă pentru orice

$x_0, x_1 \in X$, există un drum în X cu originea în x_0 și extremitatea în x_1. Un subspațiu topologic nevid S al lui X se numește conex prin arce dacă spațiul topologic $(S, \mathcal{T}_S)$ este conex prin arce.

6.53. Exemple. 1) Spațiul topologic ce conține un singur punct este conex prin arce.

2) Elipsa $E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right\}\subset\mathbb{R}^2$ este un spațiu conex prin arce. Pentru a verifica această afirmație, să definim aplicația continuă surjectivă $f: \mathbb{R}\longrightarrow E$, $f(\theta)=(a\cos\theta, b\sin\theta)$. Deci, orice două puncte din E pot fi luate de forma $f(\theta_0)$ și $f(\theta_1)$, iar aplicația continuă $\alpha : [0,1]\longrightarrow E$, $\alpha(t)=f((1-t)\theta_0+t\theta_1)$, $t\in[0,1]$, este un drum în E ce unește $f(\theta_0)$ cu $f(\theta_1)$.

3) Spațiul topologic $D^n=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\|\leqslant 1\}\subset\mathbb{R}^n$ este conex prin arce, căci D^n este convexă [v. justificarea de la 6.13,2)].

4) Spațiul topologic $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\subset\mathbb{R}^n$ este conex prin arce pentru $n\geqslant 2$ [v. demonstrația de la 6.13,1)].

6.54. Observații. 1) Orice spațiu topologic conex prin arce este conex (v. 6.12).

De exemplu, ținînd seama de cele stabilite la 6.15,2), $GL(\mathbb{R}^n)$ nu este conex prin arce.

2) In general, reciproca afirmației precedente nu este adevărată, adică nu orice spațiu topologic conex este și conex prin arce. Spre exemplificare, să considerăm spațiul topologic $X=A\cup B\subset\mathbb{R}^2$ cu topologia relativă, unde

$$A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0 \quad \text{și} \quad y=\sin\frac{1}{x}\right\},$$

$$B = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=0 \quad \text{și} \quad |y|\leqslant 1\right\}.$$

Atunci $X=\overline{A}$ este conex (v. 6.23). Pe de altă parte, să observăm că X nu este conex prin arce, căci nici un punct din B nu poate fi unit cu un punct din A printr-un drum în X. Vom dovedi acest lucru prin reducere la absurd. Să presupunem deci că

există aplicaţia continuă $\alpha : [0,1] \longrightarrow X$ astfel încît $\alpha(0) \in B$ şi $\alpha(1) \in A$. Mulţimea $\mathrm{Im}(\alpha) \cap B$ este închisă în $\mathrm{Im}\,\alpha$, deci $\alpha^{-1}(\mathrm{Im}\,\alpha \cap B)$ este închisă în $[0,1]$ şi este nevidă, căci $0 \in \alpha^{-1}(\mathrm{Im}\,\alpha \cap B)$. Fie $t_0 \in \alpha^{-1}(\mathrm{Im}\,\alpha \cap B)$ astfel încît $\alpha(t_0) = (0,b)$ şi $V = \{ (x,y) \in \mathrm{Im}\,\alpha \mid |x| < 1, \quad |y-b| < 1 \}$. Atunci există o mulţime deschisă conexă U ce conţine t_0 şi inclusă în $[0,1]$ astfel încît $\alpha(U) \subset V$. Deoarece U este conexă, $\alpha(U)$ este conţinută într-o componentă conexă a lui V care conţine pe $(0,b)$, componenţă ce este inclusă în $\mathrm{Im}\,\alpha \cap B$, de unde rezultă că $\alpha^{-1}(\mathrm{Im}\,\alpha \cap B)$ este deschisă, adică $\alpha^{-1}(\mathrm{Im}\,\alpha \cap B) = [0,1]$, sau $\alpha([0,1]) = \mathrm{Im}\,\alpha \subset B$, ceea ce contrazice ipoteza $\alpha(1) \in B$.

3) Dacă X este un spaţiu topologic nevid şi A este o submulţime conexă prin arce a lui X, atunci exemplul precedent arată că, în general, $\bar{A}$ nu este conexă prin arce.

6.55 Propoziţie. Fie X, Y spaţii topologice nevide şi $f : X \longrightarrow Y$ o aplicaţie continuă surjectivă. Dacă X este conex prin arce, atunci şi Y este conex prin arce.

Demonstraţie. Dacă $y_0, y_1 \in Y$, atunci există $x_0, x_1 \in X$ astfel încît $f(x_0) = y_0$, $f(x_1) = y_1$. Deoarece X este conex prin arce, există aplicaţia continuă $\alpha : [0,1] \longrightarrow X$ astfel încît $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) = x_1$. Dar atunci aplicaţia continuă $f|_{\mathrm{Im}\,\alpha} \circ \alpha : [0,1] \longrightarrow X$ este un drum în Y ce uneşte y_0 cu y_1.

Q. E. D.

6.56. Exemplu. Pentru $n \geq 1$, sfera unitate S^n este conexă prin arce. In adevăr, pentru $n \geq 1$, $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ este conex prin arce [v.6.53,4)] şi aplicaţia $f : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow S^n$ definită la 6.15,1), este continuă şi surjectivă.

6.57. Corolar. Dacă $f:X \longrightarrow Y$ este un homeomorfism, atunci X este conex prin arce dacă şi numai dacă Y este conex prin arce.

6.58. Corolar. Dacă $(X, \mathcal{T})$ este un spaţiu topologic conex prin arce şi R este o relaţie de echivalenţă pe X, atunci $(X/R, \mathcal{T}/R)$ este conex prin arce.

De exemplu, spaţiul proiectiv real m-dimensional $P\mathbb{R}^m (m \geq 0)$ este conex prin arce (v.şi 6.18).

6.59. Corolar. Dacă $f:X \longrightarrow Y$ este o aplicaţie continuă şi $A \subseteq X$ este o submulţime conexă prin arce, atunci $f(A)$ este conexă prin arce. Prin urmare, proprietatea unei mulţimi dintr-un spaţiu topologic de a fi conexă prin arce este topologică.

6.60. Propoziţie. Fie $\{X_t\}_{t \in T}$, $T \neq \emptyset$ o familie arbitrară de spaţii topologice nevide. Atunci $\prod_{t \in T} X_t$ este conex prin arce dacă şi numai dacă pentru orice $t \in T$, X_t este conex prin arce.

Demonstraţie. Să presppunem că $\prod X_t$ este conex prin arce. Deoarece pentru orice $t_o \in T$, $p_{t_o} : \prod X_t \longrightarrow X_{t_o}$ este continuă şi surjectivă [v.4.2,3)], X_{t_o} este conex prin arce (v.6.55). Reciproc, să presupunem că X_t este conex prin arce pentru orice $t \in T$ şi fie $f, g \in \prod X_t$. Deoarece pentru orice $t \in T$, $f(t), g(t) \in X_t$, rezultă că există aplicaţia continuă $\alpha_t : [0,1] \longrightarrow X_t$ astfel încît $\alpha_t(0) = f(t)$, $\alpha_t(1) = g(t)$, pentru orice $t \in T$. Aplicaţia $\alpha : [0,1] \longrightarrow \prod X_t$, $[\alpha(s)](t) = \alpha_t(s)$, $s \in [0,1]$, este continuă (v.4.4) şi $\alpha(0) = f$, $\alpha(1) = g$.

Q. E. D.

Prin urmare, conexitatea prin arce este o proprietate multiplicativă.

6.61 Exemple. 1) $\mathbb{R}^n$ este conex prin arce, căci $\mathbb{R}$ este

conex prin arce.

2) Hipercilindrul $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ din $\mathbb{R}^{n+1}$ este conex prin arce pentru $n \geq 2$. Hiperboloidul de indice n din $\mathbb{R}^{n+1}$ este atunci şi el conex prin arce, căci este homeomorf cu $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ [v.2.73,4)] .

3) Torul n-dimensional $T^n = S^1 \times \ldots \times S^1$ (n-ori) este conex prin arce, căci S^1 este conex prin arce (v.6.56).

4) Torul plin $D^2 \times S^1$ este conex prin arce.

6.62. Propoziţie. Fie X un spaţiu topologic nevid, A_0 şi $\{A_t\}_{t \in T}$ submulţimi conexe prin arce ale lui X, $T \neq \emptyset$. Dacă $A_0 \cap A_t \neq \emptyset$ pentru orice $t \in T$, atunci submulţimea $B = A_0 \cup (\bigcup_{t \in T} A_t)$ este conexă prin arce.

Demonstraţie. Fie $b_0, b_1 \in B$. Dacă $b_0, b_1 \in A_0$, există aplicaţia continuă $\alpha : [0,1] \longrightarrow A_0 \subset B$ astfel încît $\alpha(0) = b_0$, $\alpha(1) = b_1$. Dacă $b_0 \in A_0$ şi $b_1 \in A_{t_0}$ ($t_0 \in T$), fie c un punct din $A_0 \cap A_{t_0}$. Fie α_0 (resp. α_1) un drum în A_0 (resp A_{t_0}) ce uneşte c cu b_0 (resp. b_1). Aplicaţia continuă β definită prin

$$\beta(s) = \begin{cases} \alpha_0(1-2s) & \text{pentru} \quad 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ \alpha_1(2s-1) & \text{pentru} \quad \frac{1}{2} \leq s \leq 1, \end{cases}$$

(pentru justificarea continuităţii lui β, v.2.61) este un drum în B ce uneşte b_0 cu b_1. Dacă $b_0 \in A_{t_1}$ şi $b_1 \in A_{t_2}$ ($t_1, t_2 \in T$), fie c_0 (resp. c_1) un punct din $A_0 \cap A_{t_1}$ (resp. $A_0 \cap A_{t_2}$). Fie γ_0 (resp. γ_1, resp. γ_2) un drum în A_{t_1} (resp. A_0, resp. A_{t_2}) ce uneşte b_0 cu c_0 (resp. c_0 cu c_1, resp. c_1 cu b_1). Aplicaţia continuă γ definită prin

$$\gamma(s) = \begin{cases} \gamma_0(3s) & \text{pentru} \quad 0 \leq s \leq \frac{1}{3}, \\ \gamma_1(3s-1) & \text{pentru} \quad \frac{1}{3} \leq s \leq \frac{2}{3}, \\ \gamma_2(3s-2) & \text{pentru} \quad \frac{2}{3} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

(pentru justificarea continuităţii lui γ, v.2.62) este un drum în B ce uneşte b_0 cu b_1.

Q. E. D.

6.63. Corolar. Fie X un spaţiu topologic nevid şi $\{A_t\}_{t\in T}$, $T \neq \emptyset$, o familie de submulţimi conexe prin arce din X. Dacă $\bigcap_{t\in T} A_t \neq \emptyset$, atunci $\bigcup_{t\in T} A_t$ este o submulţime conexă prin arce.

Demonstraţia este similară cu cea dată lui 6.26.

Fie S o submulţime nevidă a spaţiului topologic nevid X şi fie $\{A_t\}_{t\in T}$ familia tuturor submulţimilor conexe prin arce ale lui X ce conţin pe S. Deoarece $\bigcap_{t\in T} A_t \supseteq S \neq \emptyset$, reuniunea $A = \bigcup_{t\in T} A_t$ este conexă prin arce (v.6.63). Reuniunea A este deci cel mai mare subspaţiu conex prin arme ale lui X ce conţine pe S. Dacă S este conexă prin arce putem spune că A este un subspaţiu conex prin arce maximal al lui X. Această observaţie justifică următoarea definiţie.

6.64. Definiţie. O componentă conexă prin arce a spaţiului topologic nevid X este un subspaţiu conex prin arce maximal al lui X.

Cu notaţiile precedente, dacă S este conexă prin arce, se zice că A este componenta conexă prin arce a lui S în X. In general, $A \subseteq C$ unde C este componenta conexă a lui S în X.

6.65. Observaţii. 1) Fie X un spaţiu topologic nevid şi R relaţia binară pe X definită prin: dacă $x,y \in X$, $x\,Ry$ dacă

şi numai dacă există un drum în X ce uneşte x cu y. R este o relaţie de echivalenţă pe X ale cărei clase de echivalenţă sînt componentele conexe prin arce ale lui X. In adevăr, $x\,R\,x$, căci aplicaţia continuă $e:[0,1]\longrightarrow X$, $e(t)=x$, oricare ar fi $t\in[0,1]$, este un drum în X ce uneşte x cu x. Simetria relaţiei R este imediată: dacă α este un drum în X ce uneşte x cu y, atunci aplicaţia continuă $\beta:[0,1]\longrightarrow X$, $\beta(t)=\alpha(1-t)$, oricare ar fi $t\in[0,1]$, este un drum în X ce uneşte y cu x. In sfîrşit, relaţia R este tranzitivă, căci dacă α este un drum în X ce uneşte x cu y şi β este un drum în X ce uneşte y cu z, atunci aplicaţia continuă $\gamma:[0,1]\longrightarrow X$, definită prin :

$$\gamma(t)=\begin{cases}\alpha(2t) & \text{pentru } 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2},\\ \beta(2t-1) & \text{pentru } \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}$$

este un drum în X ce uneşte x cu z. Clasa de echivalenţă a lui $x\in X$ în raport cu relaţia R este componenta conexă prin arce a lui x în X.

2) Două componente conexe prin arce distincte sînt disjuncte

3) Spaţiul topologic $X=\overline{A}$ considerat la 6.54,2), are două componente conexe prin arce.

6.66. Definiţie. Un spaţiu topologic nevid X se numeşte local conex prin arce dacă pentru orice $x\in X$ şi orice mulţime deschisă D ce conţine x, există o mulţime deschisă conexă prin arce D_1 astfel încît $x\in D_1\subseteq D$.

De exemplu, $\mathbb{R}^n$ este local conex prin arce, căci celulele deschise din $\mathbb{R}^n$ sînt conexe prin arce. Un spaţiu topologic discret este local conex prin arce. Un produs topologic finit de spaţii local conexe prin arce este local conex prin arce.

6.67. Observaţii. 1) Un spaţiu topologic local conex prin arce este local conex.

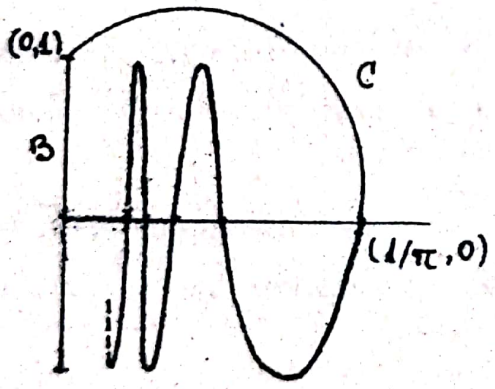
2) Spaţiul topologic $X=\bar{A}$ considerat la 6.54,2), nu este local conex prin arce, căci considerînd punctul $(o,y)\in B\subset\bar{A}$ nu există nici o mulţime deschisă conexă prin arce în $\bar{A}$ ce conţine (o,y).

3) Un spaţiu topologic poate fi conex prin arce, fără a fi local conex prin arce. De exemplu, fie $X = A\cup B\cup C\subset\mathbb{R}^2$ cu topologia relativă indusă de $\mathbb{R}^2$, unde

$$A = \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid o<x \leqslant \frac{1}{\pi} \text{ şi } y=\sin\frac{1}{x} \right\},$$

$$B = \left\{ (o,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -1 \leqslant y \leqslant 1 \right\},$$

iar C este un arc de curbă în $\mathbb{R}^2$ ce uneşte punctele $(\frac{1}{\pi},o)$ şi $(o,1)$ ca în figura de mai jos. Atunci X este conex prin arce dar nu este local conex prin arce, căci considerînd punctul $(o,y)\in B\subset X$, nu există nici o mulţime deschisă conexă prin arce în X ce conţine (o,y).



Afirmaţiile a) şi b) din propoziţia următoare arată că proprietatea unui spaţiu topologic de a fi local conex prin arce este locală.

6.68. Propoziţie. a) Dacă $(X,\mathcal{T})$ este un spaţiu topologic local conex prin arce, atunci oricare ar fi $D\in\mathcal{T}$, $D\neq\emptyset$, $(D,\mathcal{T}_D)$ este local conex prin arce.

b) Fie $\{D_t\}_{t\in T}$ o familie de mulţimi deschise ne-

vide din spaţiul topologic nevid $(X,\mathcal{T})$, $\mathcal{T} \neq \emptyset$, astfel încît $(D_t, \mathcal{T}_{D_t})$ să fie local conex prin arce pentru orice $t \in T$. Dacă $X = \bigcup_{t\in T} D_t$, atunci $(X,\mathcal{T})$ este local conex prin arce.

Demonstraţie. a) Fie $x \in D$ şi $U \in \mathcal{T}_D$ astfel încît $x \in U$. Atunci $U \in \mathcal{T}$ (v.2.11), deci în baza ipotezei există o mulţime deschisă conexă prin arce $D_1 \in \mathcal{T}$ astfel încît $x \in D_1 \subseteq U$. Dar $D_1 \in \mathcal{T}_D$, deci $(D,\mathcal{T}_D)$ este local conex prin arce.

b) Fie $x \in X$ şi $D \in \mathcal{T}$ cu proprietatea $x \in D$. Atunci există $t \in T$, astfel încît $x \in D_t$. Deoarece $D \cap D_t \in \mathcal{T}_{D_t}$ şi $x \in D \cap D_t$, există o mulţime conexă prin arce $U \in \mathcal{T}$ cu proprietatea $x \in U \subseteq D \cap D_t \subseteq D$. Apartenenţele $U \in \mathcal{T}_{D_t}$ şi $D_t \in \mathcal{T}$ implică $U \in \mathcal{T}$, adică X este local conex prin arce.

Q. E. D.

6.69. Propoziţie. Într-un spaţiu local conex prin arce X, orice componentă conexă prin arce este deschisă în X.

Demonstraţie. Fie A o componentă conexă prin arce a lui X, x un punct din A şi D_1 o mulţime deschisă conexă prin arce ce conţine x (v.6.66). Uniunea $A \cup D_1$ este conexă prin arce (v.6.63) şi în consecinţă $D_1 \subset A$, ceea ce arată că A este deschisă în X [v. 2.5,7)].

Q. E. D.

6.70. Corolar. Dacă spaţiul topologic X este conex şi local conex prin arce, atunci X este conex prin arce.

Demonstraţie. Fie A o componentă conexă prin arce a lui X. Dacă $A=X$ afirmaţia este adevărată, aşa încît să presupunem că $A \subset X$. Să observăm că $A \neq \emptyset$ şi A este deschisă în X (v. 6.69). Pe de altă parte, fie $x \in A'$ şi D_1 o mulţime deschisă conexă prin arce ce conţine x(v.6.66). Atunci $D_1 \cap A = \emptyset$,

adică $D_1 \subset A'$, căci în caz contrar ar exista $y \in D_1 \cap A$ şi x ar putea fi unit cu orice punct din A, printr-un drum via y [v. 6.65,1)] , ceea ce ar implica $x \in A$. Deci A' este deschisă, adică A este şi închisă în X. Deoarece X este conex, rezultă $A=X$ (v.6.1).

Q. E. D.

In baza celor demonstrate anterior, rezultă imediat şi următoarea afirmaţie.

6.71. Corolar. Intr-un spaţiu local conex prin arce, componentele conexe prin arce coincid respectiv cu componentele conexe.

Prin urmare, numărul componentelor conexe prin arce ale unui spaţiu topologic compact şi local conex prin arce este finit.

Algebrizarea chestiunilor referitoare la conexiune şi conexiune prin arce.

Conexiunea şi conexiunea prin arce sînt singurele proprietăţi ale unui spaţiu topologic studiate atît în topologia generală cît şi în topologia algebrică. Topologia algebrică descrie structura unui spaţiu topologic asociind acestuia un sistem algebric, de obicei un grup sau un şir de grupuri. In cele ce urmează vom dezvolta într-o manieră simplă algebra subordonată conceptelor de conexiune şi conexiune prin arce.

6.72. Definiţie. Fie X un spaţiu topologic, $\mathbb{Z}$ grupul aditiv al întregilor dotat cu topologia discretă şi mulţimea

$$H^0(X) = \{ h : X \longrightarrow \mathbb{Z} \mid h \text{ continuă} \} .$$

In raport cu operaţia obişnuită de adunare a funcţiilor, $H^0(X)$ este un grup abelian.

6.73. Propoziţie. Spaţiul topologic X este conex dacă şi numai dacă orice aplicaţie continuă $h : X \longrightarrow \mathbb{Z}$ este constan

tă. Prin urmare, X este conex dacă şi numai dacă $H^0(X)$ poate fi identificat cu $\mathbb{Z}$.

Demonstraţie. Dacă X nu este conex, atunci există o aplicaţie continuă a lui X pe $\{0,1\} \subset \mathbb{Z}$ ce nu este constantă (v.6.7). Reciproc, dacă există o aplicaţie continuă $h:X \longrightarrow \mathbb{Z}$ ce nu este constantă, fie $n \in h(X)$. Dacă definim aplicaţia $u : \mathbb{Z} \longrightarrow \{0,1\}$ prin

$$u(z) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } z=n \ , \\ 1 & \text{pentru } z \in \mathbb{Z} \setminus \{n\}, \end{cases}$$

atunci u este continuă şi $u \circ h : X \longrightarrow \{0,1\}$ este o aplicaţie continuă surjectivă, ceea ce arată că X nu este conex (v.6.7).

Q. E. D.

Aşa dar, X este conex, dacă şi numai dacă $H^0(X)$ este un grup abelian cu un singur generator. Prin urmare, dacă X este conex, atunci X este format dintr-o "singură bucată" şi această proprietate este reflectată în faptul că grupul asociat lui X, $H^0(X)$ este generat de un singur element.

6.74. Definiţie. Fie X,Y spaţii topologice şi $f:X \longrightarrow Y$ o aplicaţie continuă. Definim atunci aplicaţia $H^0(f):H^0(Y) \longrightarrow H^0(X)$ $(H^0(f))(h)=h \circ f$, pentru orice $h \in H^0(Y)$.

Aplicaţia $H^0(f)$ astfel definită este un homomorfism de grupuri abeliene. In adevăr, pentru orice $x \in X$ şi orice $h_1, h_2 \in H^0(Y)$,

$$(H^0(f)(h_1+h_2))(x)=((h_1+h_2)\ f)(x)=(h_1+h_2)(f(x))=$$

$$= h_1(f(x))+h_2(f(x))=(H^0(f)(h_1))(x)+(H^0(f)(h_2))(x)=$$

$$=(H^0(f)(h_1)+H^0(f)(h_2))(x).$$

6.75. Observaţii. 1) $H^0(1_X)=1_{H^0(X)}$. In adevăr, pentru orice $h \in H^0(X)$, $(H^0(1_X))(h)=h \circ 1_X=h$.

2) Dacă X,Y,Z sînt spaţii topologice şi $f:X \longrightarrow Y$, $g:Y \longrightarrow Z$ sînt aplicaţii continue, atunci $H^0(g\circ f)=H^0(f)\circ H^0(g)$. In adevăr, pentru orice $h \in H^0(Z)$,

$$(H^0(g\circ f))(h) = h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f = H^0(f)(h\circ g) =$$

$$= H^0(f)(H^0(g)(h)) = (H^0(f)\circ H^0(g)(h) .$$

3) Proprietăţile 1) şi 2) arată că H^0 este un functor contravariant de la categoria Top a spaţiilor topologice la categoria Ab a grupurilor abeliene.

Dacă X este un spaţiu topologic nevid, fie R' relaţia de echivalenţă pe X ce a fost definită la 6.30,2), $\pi_0'(X)$ mulţimea factor X/R' şi $q'_X:X \longrightarrow \pi_0'(X)$ proiecţia canonică corespunzătoare. Spaţiul topologic nevid X este conex dacă şi numai dacă mulţimea $\pi_0'(X)$ este formată dintr-un singur element.

Fie Y alt spaţiu topologic nevid şi $f:X \longrightarrow Y$ o aplicaţie continuă. Dacă $x,x_1 \in X$ şi $xR'x_1$, atunci în baza lui 6.19, $f(x)R'f(x_1)$, aşa încît f induce aplicaţia $\pi_0'(f):\pi_0'(X) \longrightarrow \pi_0'(Y)$ unic determinată de proprietatea $\pi_0'(f)\circ q'_X = q'_Y \circ f$ (v.1.35).

6.76. Observaţii. 1) $\pi_0'(1_X)= 1_{\pi_0'(X)}$. In adevăr, pentru orice $[x]_{R'} \in \pi_0'(X)$, $x \in X$, $(\pi_0'(1_X))([x]_{R'}) =$

$$=(\pi_0'(1_X)\circ q'_X)(x) = (q'_X\circ 1_X)(x) = q'_X(x) = [x]_{R'} .$$

2) Dacă X,Y,Z sînt spaţii topologice nevide şi $f:X \longrightarrow Y$, $g:Y \longrightarrow Z$ sînt aplicaţii continue, atunci $\pi_0'(g\circ f)= \pi_0'(g)\circ \pi_0'(f)$. In adevăr, pentru orice $[x]_{R'} \in \pi_0'(X)$, $(\pi_0'(g\circ f))([x]_{R'})=$

$$=(\pi_0'(g\circ f)\circ q'_X)(x)=(q'_Z\circ(g\circ f))(x)=((q'_Z\circ g)\circ f)(x)=((\pi_0'(g)\circ q'_Y)\circ f)x)=$$

$$=(\pi_0'(g)\circ(q'_Y\circ f))(x)=(\pi_0'(g)\circ(\pi_0'(f)\circ q'_X))(x) =$$

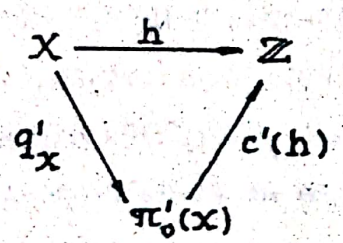
$$=(\pi_0'(g)\circ\pi_0'(f))([x]_{R'}).$$

Cu alte cuvinte, π_0' este un functor covariant de la categoria Top la categoria Ens a mulţimilor.

3) Dacă X este compact şi local conex, atunci $\pi_0'(X)$ este o mulţime finită (v.observaţia ce precede lui 6.35).

Cu ajutorul formalizării algebrice introduse putem stabili următoarea legătură între $\pi_0'(X)$ şi $H^0(X)$.

6.77. Propoziţie. Fie $h \in H^0(X)$ şi $x, x_1 \in X$. Dacă $xR'x_1$, atunci $h(x)=h(x_1)$, aşa încît h poate fi factorizată în felul următor:



unde aplicaţia $c'(h)$: $\pi_0'(X) \longrightarrow Z$ este definită prin $(c'(h))([x]_{R'}) = h(x)$, $x \in X$. Mai mult, dacă $Z^{\pi_0'(X)}$ notează grupul abelian al aplicaţiilor de la $\pi_0'(X)$ în Z, atunci aplicaţia

$$c' : H^0(X) \longrightarrow Z^{\pi_0'(X)}, \quad h \longmapsto c'(h),$$

este un monomorfism de grupuri abeliene.

Demonstraţie. Dacă $xR'x_1$, atunci există o submulţime conexă $U \subseteq X$ astfel încît $x, x_1 \in U$. Atunci $h|_U : U \longrightarrow Z$ este continuă şi deoarece U este conexă, aplicaţia $h|_U$ este constantă (v.6.9), deci $h(x)=h(x_1)$. Factorizarea aplicaţiei h rezultă atunci imediat din 1.35. Aplicaţia c' este injectivă, căci dacă $c'(h_1)=c'(h_2)$, $h_1, h_2 \in H^0(X)$, atunci $h_1 = c'(h_1) \circ q'_X = c'(h_2) \circ q'_X = h_2$. In sfîrşit, c' este un homomorfism de grupuri, căci oricare ar fi $h_1, h_2 \in H^0(X)$ şi oricare ar fi $[x]_{R'} \in \pi_0'(X)$, $(c'(h_1+h_2))([x]_{R'}) = (c'(h_1+h_2))(q'_X(x)) = (h_1+h_2)(x) = h_1(x)+h_2(x) = (c'(h_1) \circ q'_X)(x) + (c'(h_2) \circ q'_X)(x) = (c'(h_1))([x]_{R'}) +$

$+(c'(h_2))([x]_{R'}) = (c'(h_1)+c'(h_2))([x]_{R'})$, ceea ce implică $c'(h_1+h_2) = c'(h_1)+c'(h_2)$.

Q. E. D.

6.78. Corolar. Dacă X este local conex, atunci aplicația:

$$c' : H^0(X) \longrightarrow \mathbb{Z}^{\pi'_0(X)}$$

este un izomorfism de grupuri abeliene.

Demonstrație. In baza lui 6.77, tot ceea ce rămîne de dovedit este că c' este surjectivă. Fie $G:\pi'_0(X)\longrightarrow\mathbb{Z}$ o aplicație. Atunci $h=G\circ q'_X:X\longrightarrow\mathbb{Z}$ este o aplicație continuă. In adevăr pentru orice $n\in G(\pi'_0(X))$, $h^{-1}(\{n\})=(q'_X)^{-1}(G^{-1}(\{n\}))$ este o mulțime saturată (v.1.32) deci o uniune de clase de echivalență în raport cu R', adică $h^{-1}(\{n\})$ este o uniune de componente conexe. Deoarece X este local conex, orice componentă conexă a lui X este deschisă în X (v.6.34), așa încît $h^{-1}(\{n\})$ este deschisă în X, deci h este continuă. Dar în acest caz $h=c'(h)\circ q'_X=G\circ q'_X$, ceea ce-avînd în vedere unicitatea lui c'(h) (v.1.35) - implică c'(h)=G.

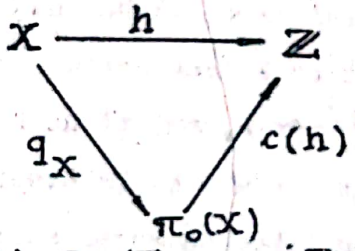
Q. E. D.

Fie acum din nou X un spațiu topologic nevid, R relația de echivalență pe X ce a fost definită la 6.65,1), $\pi'_0(X)$ mulțimea factor X/R și $q'_X:X\longrightarrow\pi'_0(X)$ proiecția canonică corespunzătoare. X este conex prin arce dacă și numai dacă mulțimea $\pi'_0(X)$ este formată dintr-un singur element . Să observăm că $1_X:X\longrightarrow X$ este compatibilă cu R și R', astfel încît ea induce o aplicație surjectivă de la $\pi'_0(X)$ pe $\pi'_0(X)$ (v. 1. 35 și 6.64). Dacă X este local conex prin arce, atunci această aplicație devine o bijecție (v.6.71). Dacă Y este alt spațiu topologic nevid și $f:X\longrightarrow Y$ o aplicație continuă, atunci procedînd similar ca în cazul lui π'_0 se arată că f induce apli-

caţia $\pi_0(f)$: $\pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Y)$ unic determinată de condiţia $\pi_0(f) \circ q_X = q_Y \circ f$. Mai mult, π_0 este de asemenea un functor covariant de la categoria Top la categoria Ens. Să mai notăm că dacă X este compact şi local conex prin arce, atunci mulţimea $\pi_0(X)$ este finită (v.observaţia ce succede lui 6.71).

Să formalizăm acum afirmaţia de la (6.54,1). In notaţiile actuale, aceasta spune că dacă $\pi_0(X)$ conţine doar un singur element, atunci $H^0(X)$ conţine doar aplicaţiile constante (v.6.73). Se poate dovedi chiar un rezultat ceva mai general, anume propoziţia următoare:

6.79. Propoziţie. Fie $h \in H^0(X)$ şi $x, x_1 \in X$. Dacă xRx_1, atunci $h(x)=h(x_1)$, aşa încît h poate fi factorizată în felul următor:



unde aplicaţia $c(h): \pi_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$ este definită prin $(c(h))([x]_R) = h(x)$, $x \in X$ (v.1.35). Mai mult, aplicaţia

$$c: H^0(X) \longrightarrow \mathbb{Z}^{\pi_0(X)}, \quad h \longmapsto c(h),$$

este un monomorfism de grupuri abeliene, unde $\mathbb{Z}^{\pi_0(X)}$ notează grupul abelian al aplicaţiilor definite pe $\pi_0(X)$ şi cu valori în $\mathbb{Z}$.

Demonstraţia este complet similară cu cea dată lui 6.77.

6.80. Observaţie. Prima parte a propoziţiei 6.79 conţine afirmaţia de la 6.54,1). In adevăr, dacă X este conex prin arce, $\pi_0(X)$ conţine doar un singur element, aşa încît orice aplicaţie de la $\pi_0(X)$ în $\mathbb{Z}$ este constantă. Dar atunci, pentru orice $f \in H^0(X)$, $c(f): \pi_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$ va fi constantă, astfel încît şi aplicaţia $f=c(f) \circ q_X : X \longrightarrow \mathbb{Z}$ va fi constantă.

Deci X este conex (v.6.73).

Tinînd acum seama de 6.69 şi procedînd identic ca în demonstraţia lui 6.78, din 6.79 rezultă atunci imediat următoarea consecinţă.

6.81. Corolar. Dacă X este local conex prin arce, atunci aplicaţia

$$c : H^0(X) \longrightarrow \mathbb{Z}^{\pi_0(X)}$$

este un izomorfism de grupuri abeliene.

Inainte de a ataşa unui spaţiu topologic o altă structură algebrică, să reamintim întîi cîteva chestiuni despre grupuri abeliene libere.

Fie X o mulţime nevidă, G un grup abelian şi $i:X \longrightarrow G$ o aplicaţie. Se zice că perechea (G,i) se bucură de proprietatea de universalitate în raport cu X dacă pentru orice grup abelian A şi orice aplicaţie $j:X \longrightarrow A$, există un homomorfism unic $\varphi : G \longrightarrow A$ astfel încît $j = \varphi \circ i$. In acest caz se mai spune că G este un grup abelian liber a cărei mulţime de generatori este i(X). Dacă atît (G,i) cît şi (G_1,i_1) se bucură de proprietatea de universalitate în raport cu X, atunci există un izomorfism unic $\varphi_1 : G \longrightarrow G_1$ astfel încît $i_1 = \varphi_1 \circ i$. Cu alte cuvinte, pentru un X dat, perechea (G,i) cu proprietatea de universalitate în raport cu X este modulo izomorfisme - unică. In ceea ce priveşte existenţa grupurilor abeliene libere se poate arăta că pentru un $X \neq \emptyset$ dat, perechea $(F(X),i_X)$ se bucură de proprietatea de universalitate în raport cu X, unde $F(X) = \{ \xi : X \longrightarrow \mathbb{Z} \mid \xi(x)=0$ cu excepţia unui număr finit de elemente $x \in X \}$ şi $i_X : X \longrightarrow F(X)$ este definită prin

$$[i_X(x)](x') = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x' \neq x, \\ 1 & \text{pentru } x' = x. \end{cases}$$

Dată orice aplicaţie $f:X \longrightarrow Y$ de mulţimi, în baza proprietăţii de universalitate există un homomorfism unic

$F(f):F(X) \longrightarrow F(Y)$ astfel încît $F(f) \circ i_X = i_Y \circ f$. F este un functor covariant de la categoria Ens la categoria Ab.

De asemenea, reamintim că pentru orice grup abelian A, aplicaţia

$$(i_X)^* : \mathrm{Hom}(F(X),A) \longrightarrow A^X, \quad (i_X)^*(\varphi) = \varphi \circ i_X ,$$

este bijectivă, unde $\mathrm{Hom}(F(X),A)$ notează mulţimea homomorfismelor de la $F(X)$ în A. In adevăr, în baza proprietăţii de universalitate, oricare ar fi aplicaţia $h \in A^X$, există un homomorfism unic $\varphi : F(X) \longrightarrow A$ astfel încît $(i_X)^*(\varphi) = \varphi \circ i_X = h$.

6.82. Definiţie. Fie $H_0(X) = F(\pi_0(X))$ şi $H_0'(X) = F(\pi_0'(X))$.

H_0 şi H_0' sînt functori covarianţi de la categoria Top la categoria Ab.

Să observăm că proiecţia canonică $q_X : X \longrightarrow \pi_0(X)$ [resp. $q_X' : X \longrightarrow \pi_0'(X)$] induce un homomorfism.

$$F(q_X) : F(X) \longrightarrow F(\pi_0(X)) = H_0(X)$$

[resp. $F(q_X') : F(X) \longrightarrow F(\pi_0'(X)) = H_0'(X)$] de grupuri abeliene unic determinat de condiţia $i_{\pi_0(X)} \circ q_X = F(q_X) \circ i_X$ [resp. $i_{\pi_0'(X)} \circ q_X' = F(q'_X) \circ i_X$] .

Pe de altă parte, în baza celor precizate mai sus, aplicaţiile :

$$(i_{\pi_0(X)})^* : \mathrm{Hom}(H_0(X),\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}^{\pi_0(X)}$$

şi

$$(i_{\pi_0'(X)})^* : \mathrm{Hom}(H_0'(X), \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}^{\pi_0'(X)}$$

sînt izomorfisme de grupuri abeliene, aşa încît ţinînd seama de cele stabilite la 6.77, 6.78, 6.79 şi 6.81 obţinem următoarea afirmaţie.

6.83. Propoziţie. Pentru orice spaţiu topologic nevid X, aplicaţiile :

$$\psi = (i^{*}_{\pi_0(X)})^{-1} \circ c : H^0(X) \longrightarrow Hom\,(H_0(X), \mathbb{Z})$$

şi

$$\psi' = (i^{*}_{\pi'_0(X)})^{-1} \circ c' : H^0(X) \longrightarrow Hom\,(H'_0(X), \mathbb{Z})$$

sînt monomorfisme de grupuri abeliene. Dacă X este local conex (resp. local conex prin arce), atunci ψ' (resp. ψ) este un izomorfism de grupuri abeliene.

A p e n d i c e

Identificări şi lipiri

Fie X un spaţiu topologic, $X \neq \emptyset$, Y un subspaţiu nevid al lui X şi $f:Y \longrightarrow X$ o aplicaţie continuă avînd următoarea proprietate: pentru orice $y \in Y$, mulţimea $\{ y, f(y), f(f(y)) = f^2(y), \ldots, f(f^{k-1}(y)) = f^k(y), \ldots \}$ conţine cel mult două puncte distincte. De exemplu, această condiţie este satisfăcută dacă $Y \cap f(Y) = \emptyset$ sau dacă $f:Y \longrightarrow X$ este o aplicaţie constantă. Fie R relaţia de echivalenţă pe X ce identifică punctele y şi $f(y)$ pentru $y \in Y$:

- dacă $x \in Y \cup f(Y)$ clasa de echivalenţă a lui x este $\{x\}$;
- dacă $y \in Y$ clasa de echivalenţă a lui y este $\{f(y)\} \cup f^{-1}(f(y))$;
- dacă $x \in f(Y) \setminus Y \cap f(Y)$ clasa de echivalenţă a lui x este $\{x\} \cup f^{-1}(x)$.

In aceste condiţii se zice că spaţiul topologic cît X/R, care se notează adesea şi cu X/f, este <u>spaţiul obţinut pornind de la</u> X <u>identificînd</u> punctele y şi $f(y)$, $y \in Y$. In cazul cînd f este aplicaţia constantă a lui Y într-unul din punctele sale, acest spaţiu topologic cît se notează X/Y şi se zice că X/Y este <u>spaţiul obţinut pornind de la</u> X identificînd Y cu un punct.

A.1. <u>Propoziţie</u>. Dacă X este un spaţiu compact şi Hausdorff şi dacă Y este un subspaţiu închis al lui X, atunci spaţiul X/f este compact şi Hausdorff.

<u>Demonstraţie</u>. Compacitatea lui X/f este o consecinţă imediată a lui 3.17. Deoarece X este compact şi Hausdorff, pentru a dovedi că X/f este Hausdorff este suficient să verificăm

că graful Γ al relaţiei R este închis în $X \times X$ (v.5.28). Dar Γ constă din uniunea următoarelor patru subspaţii:

$$\Delta_X = \{ (x,x) \mid x \in X \},$$

$$A = \{ (y,f(y)) \mid y \in Y \},$$

$$B = \{ (f(y),y) \mid y \in Y \},$$

$$C = \{ (y,y_1) \in Y \times Y \mid f(y) = f(y_1) \}.$$

Deoarece X este Hausdorff, diagonala Δ_X a lui $X \times X$ este închisă în $X \times X$ (v.5.7). Pe de altă parte, să observăm că $A = \varphi(Y)$, unde $\varphi : Y \longrightarrow X \times X$, $\varphi(y) = (y,f(y))$, $y \in Y$, este continuă, căci $\varphi = (i,f)$, $i : Y \subset X$ fiind aplicaţia de incluziune (v.4.3). Deoarece Y este o submulţime închisă a spaţiului compact X, Y este un compact (v.3.12); dar $X \times X$ este Hausdorff [v.5.2.6)] aşa încît φ este o aplicaţie închisă (v.5.15), deci $\varphi(Y) = A$ este închisă în $X \times X$. Similar se arată că B este închisă în $X \times X$. In sfîrşit, C este o submulţime închisă în $Y \times Y$, căci $C = (f \times f)^{-1}(\Delta_X)$ şi $f \times f : Y \times Y \longrightarrow X \times X$ este continuă (v.4.5). Dar $Y \times Y$ este o submulţime închisă în $X \times X$ [v.4.2,2)] astfel încît C este închisă în $X \times X$ (v.2.11).

Q. E. D.

A.2. Observaţie. In ipotezele lui A.1., proiecţia canonică $q : X \longrightarrow X/f$ este un homeomorfism al mulţimii deschise $U = X \setminus (Y \cup f(Y))$ pe mulţimea deschisă $q(U)$ [v.şi 2.73,7)].

A.3. Exemple. 1) Discul unitate închis n-dimensional D^n este homeomorf cu spaţiul obţinut pornind de la produsul topologic $S^{n-1} \times [0,1]$ identificînd subspaţiul $S^{n-1} \times \{0\}$ cu un punct.

In adevăr, aplicaţia surjectivă $g : S^{n-1} \times [0,1] \longrightarrow D^n$, $g(x,t) = tx$, $x \in S^{n-1}$, $t \in [0,1]$, induce o aplicaţie continuă şi bijectivă a spaţiului topologic $X = S^{n-1} \times [0,1] / S^{n-1} \times \{0\}$ pe D^n.

Deoarece X este compact şi Hausdorff (v. A.1), această aplicaţie este un homeomorfism (v.5.16).

2) Torul bidimensional $T^2=S^1 \times S^1$ este homeomorf cu spaţiul obţinut pornind de la pătratul $[0,1] \times [0,1]$ identificînd punctele $(0,s)$ şi $(1,s)$, $s \in [0,1]$ şi punctele $(t,0)$ şi $(t,1)$, $t \in [0,1]$.

In adevăr, fie R relaţia de echivalenţă pe $[0,1] \times [0,1]$ ce identifică punctele menţionate şi R' relaţia de echivalenţă pe $\mathbb{R}^2$ definită prin $xR'y$ dacă şi numai dacă $x-y \in \mathbb{Z}^2$. Incluziunea $i: [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ este compatibilă cu R şi R' şi deci induce o aplicaţie continuă $\hat{i}:([0,1] \times [0,1])/_R \longrightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ care este şi bijectivă. Pe de altă parte, se ştie că există un homeomorfism $g: \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \longrightarrow T^2$ [v. exemplul 2) ce precede 2.75], aşa încît aplicaţia $g \circ \hat{i}:([0,1] \times [0,1])/R \longrightarrow T^2$ este o bijecţie continuă. Deoarece $([0,1] \times [0,1])/R$ este compact şi Hausdorff (v.A.1), iar T^2 are aceeaşi proprietate, această aplicaţie este un homeomorfism.

3) Cilindrul $S^1 \times \mathbb{R}$ este homeomorf cu spaţiul obţinut pornind de la produsul $[0,1] \times \mathbb{R}$ identificînd punctele $(0,y)$ şi $(1,y)$, $y \in \mathbb{R}$.

In adevăr, să observăm întîi că $S^1 \times \mathbb{R}$ este homeomorf cu spaţiul topologic cît $\mathbb{R}^2/R_g$, unde surjecţia continuă deschisă $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ este definită prin $g(x_1,x_2)=(e^{2\pi i x_1}, x_2)$, $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$. Se constată imediat că $\mathbb{R}^2/R_g$ nu este altcineva decît spaţiul orbitelor acţiunii $\mu : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\mu(n,(x_1,x_2))=(n+x_1,x_2)$, $n \in \mathbb{Z}$, $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ (v.6.44). Pe de altă parte, raţionînd similar ca la 2), se verifică imediat că $[0,1] \times \mathbb{R}/R$ este homeomorf cu $\mathbb{R}^2/R_g$.

Vom prezenta mai departe un caz important al construcţiei deschise mai sus.

Fie X,Z spaţii topologice nevide, Y un subspaţiu nevid al lui Z şi $f:Y \longrightarrow X$ o aplicaţie continuă. Luînd suma topologică $X \amalg Z = X^* \cup Z^*$, unde $X^* = X \times \{1\}$, $Z^* = Z \times \{2\}$ (v.2.14) şi definind aplicaţia $g:Y^* \longrightarrow X \amalg Z$, $g(y,2)=(f(y),1)$, unde $Y^* = Y \times \{2\}$, se observă că g este continuă, căci $g=i_1 \circ f \circ (i_2|_Y)^{-1}$ unde $i_1:X \longrightarrow X \amalg Z$, $i_1(x)=(x,1)$, $x \in X$, $i_2:Z \longrightarrow X \amalg Z$, $i_2(z)=(z,2)$, $z \in Z$, sînt injecţiile continue canonice şi că $Y^* \cap g(Y^*) = \emptyset$

Putem deci considera spaţiul $X \amalg Z/g$ obţinut pornind de la suma topologică $X \amalg Z$ identificînd punctele $(y,2)$ şi $g(y,2)$, $(y,2) \in Y^*$. Acest spaţiu se notează cu $X \cup_f Z$ şi se zice că $X \cup_f Z$ este <u>spaţiul obţinut lipind</u> Z <u>la</u> X <u>prin intermediul aplicaţiei f.</u>

A.4. <u>Propoziţie</u>. Dacă X şi Z sînt spaţii conexe (resp. conexe prin arce), atunci $X \cup_f Z$ este conex (resp. conex prin arce).

<u>Demonstraţie</u>. Fie $q:X \amalg Z \longrightarrow X \amalg Z/g = X \cup_f Z$ proiecţia canonică. Deoarece q este continuă (v.2.66) şi $X^* = X \times \{1\}$, $Z^* = Z \times \{2\}$ sînt conexe (resp. conexe prin arce) (v.6.36 şi resp. 6.60) $q(X^*)$ şi $q(Z^*)$ sînt conexe (resp. conexe prin arce) (v.6.19 şi resp. 6.59).
Pe de altă parte, să observăm că :

$$X \cup_f Z = q(X^*) \cup q(Z^*)$$

şi

$$q(X^*) \cap q(Z^*) = q(Y^*) = q(g(Y^*)) \neq \emptyset \quad ,$$

aşa încît afirmaţia din enunţ este o consecinţă imediată a lui 6.26 (resp. 6.63).

Q. E. D.

A.5. <u>Propoziţie</u>. Fie X,Z spaţii compacte nevide şi Hausdorff, Y un subspaţiu închis nevid al lui Z şi $f:Y \longrightarrow X$ o aplicaţie continuă. Atunci spaţiul $X \cup_f Z$ obţinut lipind Z la X, prin intermediul aplicaţiei f este compact şi Hausdorff.

Demonstraţie. Dacă X,Z sînt spaţii compacte, atunci suma topologică $X \amalg Z$ este compactă. In adevăr, deoarece $i_1 : X \longrightarrow X \amalg Z$, $i_2 : Z \longrightarrow X \amalg Z$ sînt continue, mulţimile $i_1(X)$ şi $i_2(Z)$ sînt compacte (v.3.18); dar $X \amalg Z = i_1(X) \cup i_2(Z)$, aşa încît compacitatea lui $X \amalg Z$ este o consecinţă imediată a lui 3.14 De asemenea, dacă X,Z sînt spaţii Hausdorff, atunci suma topologică $X \amalg Z$ este Hausdorff [v.5.2,5)] . In sfîrşit, Y fiind închisă în Z, $Y^* = Y \times \{2\}$ este închisă în $Z^* = Z \times \{2\}$ [v. 4.2,2)] , iar $Z^* = i_2(Z)$ este închisă în $X \amalg Z$ (v.2.15), aşa încît Y^* este un subspaţiu închis al lui $X \amalg Z$ (v.2.11). Afirmaţia din enunţ este atunci o reformulare a lui A.1., căci $X \cup_f Z = X \amalg Z/\varrho$.

Q. E. D.

A.6. Corolar. In ipotezele propoziţiei A.5, proiecţia canonică $q : X \amalg Z \longrightarrow X \amalg Z/\varrho = X \cup_f Z$ induce un homeomorfism al lui X^* pe $q(X^*)$.

In adevăr, q induce o aplicaţie continuă bijectivă a lui X^* pe $q(X^*)$ si deoarece X^* este compact şi Hausdorff, afirmaţia este o consecinţă a lui 5.16.

A.7. Exemple. 1) Fie X,Z submulţimi închise nevide ale spaţiului topologic nevid E astfel încît $X \cap Z \neq \emptyset$ şi $E = X \cup Z$. Atunci E este homeomorf cu spaţiul obţinut lipind Z la X prin intermediul incluziunii canonice $i : X \cap Z \subset X$.

In adevăr, fie $q : X \amalg Z \longrightarrow X \cup_i Z$ proiecţia canonică. Aplicaţia $\varphi : E \longrightarrow X \cup_i Z$, definită prin :

$$\varphi(e) = \begin{cases} q(i_1(e)) & \text{pentru } e \in X, \\ q(i_2(e)) & \text{pentru } e \in Z, \end{cases}$$

unde $i_1 : X \longrightarrow X \amalg Z$, $i_2 : Z \longrightarrow X \amalg Z$ sînt injecţiile continue canonice, este bijectivă şi continuă (v.2.61), inversa

ei $\psi : X \cup_i Z = q(X^*) \cup q(Z^*) \longrightarrow E$, definită prin

$$\psi(v) = \begin{cases} i_1^{-1}(q^{-1}(v)) & \text{pentru } v \in q(X^*), \\ i_2^{-1}(q^{-1}(v)) & \text{pentru } v \in q(Z^*), \end{cases}$$

fiind de asemenea continuă.

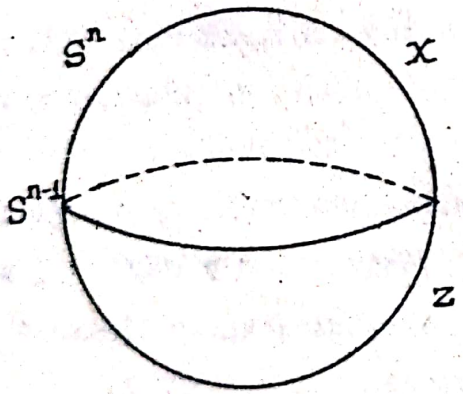
2) Sfera unitate S^n, $n \geq 1$, este homeomorfă cu spaţiul obţinut lipind discul unitate închis D^n la discul D^n prin intermediul aplicaţiei identice $1 : S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1} \subset D^n$.

In adevăr, dacă notăm:

$$X = \{ (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} \geq 0 \},$$

$$Z = \{ (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} \leq 0 \},$$

atunci $X \cup Z = S^n$ şi $X \cap Z = S^{n-1}$. Pe de altă parte, proiecţia $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \longmapsto (x_1, \ldots, x_n)$ determină un homeomorfism al lui X (resp. Z) pe D^n care coincide cu identitatea pe S^{n-1}. Ţinînd seama de cele stabilite la 1), S^n este homeomorf cu $D^n \cup_{1_{S^{n-1}}} D^n$.



Avînd în vedere acest rezultat, se deduce imediat că spaţiul proiectiv real PR^n este homeomorf cu spaţiul obţinut pornind de la discul unitate închis D^n identificînd punctele x şi $-x$, $x \in S^{n-1}$. Intr-adevăr, aşa după cum am văzut $P\mathbb{R}^n$ este homeomorf cu spaţiul obţinut pornind de la S^n identificînd punctele x şi $-x$ [v.2.73,6)].

3) Sfera unitate S^n, $n \geq 1$, este homeomorfă cu spaţiul D^n/S^{n-1} obţinut pornind de la discul unitate închis D^n identi-

ficînd frontiera sa S^{n-1} cu un punct.

In adevăr, fie

$$B_1 = \left\{ x \in D^n \mid \|x\| \leqslant \frac{1}{2} \right\} \text{ şi } B_2 = \left\{ x \in D^n \mid \frac{1}{2} \leqslant \|x\| \leqslant 1 \right\}.$$

B_1 este homeomorf cu D^n şi B_2 cu produsul $S^{n-1} \times [0,1]$. Dacă $q: D^n \longrightarrow D^n/S^{n-1}$ notează proiecţia canonică, avem următoarele proprietăţi:

- $D^n/S^{n-1} \triangleq \{ q(B_1) \cup q(B_2)$ este compact şi Hausdorff (v.A.1);
- $q(B_1)$ este închisă în D^n/S^{n-1} şi homeomorfă cu D^n;
- $q(B_2)$ este închisă în D^n/S^{n-1} şi homeomorfă cu D^n (v.A.3,1);
- $q(B_1) \cap q(B_2)$ este homeomorfă cu S^{n-1}.

Ţinînd seama de cele stabilite la 1) şi 2), D^n/S^{n-1} este homeomorf cu S^n.

In particular, cercul S^1 este homeomorf cu spaţiul obţinut pornind de la segmentul $[-1,1]$ identificînd punctele -1 şi 1

Similar, S^n este homeomorfă cu spaţiul $I^n/\partial I^n$ obţinut pornind de la n-cubul unitate închis $I^n = \{ (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leqslant x_i \leqslant 1$ pentru fiecare $i=1,\ldots,n \}$ identificînd frontiera sa ∂I^n cu un punct.

4) Sfera unitate S^n, $n \geqslant 1$, este homeomorfă cu spaţiul obţinut lipind $S^{p-1} \times D^{q+1}$, $p \geqslant 1$ şi $p+q=n$, la produsul $D^p \times S^q$ prin intermediul aplicaţiei identice $1: S^{p-1} \times S^q$ (=frontiera lui $D^p \times S^q$) $\longrightarrow S^{p-1} \times S^q$ (=frontiera lui $S^{p-1} \times D^{q+1}$).

In adevăr, fie $B_1 = \left\{ (x_1,\ldots,x_{n+1}) \in S^n \mid x_1^2+\ldots+x_p^2 \leqslant \frac{1}{2} \right\}$ şi $B_2 = \left\{ (x_1,\ldots,x_{n+1}) \in S^n \mid x_1^2+\ldots+x_p^2 \geqslant \frac{1}{2} \right\}$. Uniunea $B_1 \cup B_2$ este egală cu S^n şi intersecţia $B_1 \cap B_2$ este homeomorfă cu

produsul $S^{p-1} \times S^q$. Aplicaţia

$$h : B_1 \longrightarrow D^p \times S^q \text{ , definită prin}$$

$$h(x_1,\dots,x_{n+1}) = \left(\sqrt{2}x_1,\dots,\sqrt{2}x_p,\frac{x_{p+1}}{\sqrt{1-\sum_{i=1}^{p}x_i^2}},\dots,\frac{x_{n+1}}{\sqrt{1-\sum_{i=1}^{p}x_i^2}}\right)$$

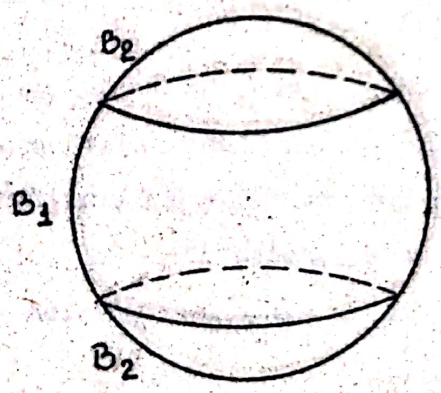
este un homeomorfism. Aceeaşi proprietate o are şi aplicaţia

$$k : B_2 \longrightarrow S^{p-1} \times D^{q+1} \text{ , definită prin}$$

$$k(x_1,\dots,x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{1-\sum_{i=p+1}^{n+1}x_i^2}},\dots,\frac{x_p}{\sqrt{1-\sum_{i=p+1}^{n+1}x_i^2}},\sqrt{2}x_{p+1},\dots\sqrt{2}x_{n+1}\right).$$

Aplicaţiile h şi k sînt astfel încît $k \circ h^{-1}$ este identitatea pe $S^{p-1} \times S^q$.

De exemplu, sfera S^2



este homeomorfă cu spaţiul $D^1 \times S^1 \cup_1 S^0 \times D^2$.

Bibliografie

1. ALBU, A.C. - Lecţii de fundamentele matematicii, Fasc.I, Tipografia Universităţii din Timişoara, 1973.

2. ALEXANDROV, P.S., FEDORČUK V.V. - Osnovnîe momentî v razvitiĭ teoretiko-mnojestvennoĭ topplogiĭ, Usp. Mat.Nauk XXXIII (201), (1978), 3-48.

3. BOURBAKI, N. - Topologie générale, Act.sci.ind.858/1142, 916/1143, 1029/1235, 1045, 1084, Hermann, Paris, 1940-1962.

4. BRÂNZEI, D. - Fundamentele matematicii structurale (Aritmetica şi algebra), Universitatea"Al.I.Cuza" Iaşi 1976.

5. BROUWER, L.E.J. - Beweis der Invarianz der Dimensionzahl, Math. Ann. 70(1911), 161-165.

6. BROWN, R. - Elements of modern topology, McGraw-Hill, London, 1968.

7. BURGHELEA, D., ALBU, A.C., BATIU, T.S. - Acţiuni diferenţiabile de grupuri Lie compacte, Monografii matematice 5, Tipografia Universităţii din Timişoara, 1975.

8. COSTINESCU, O. - Elemente de topologie generală, Editura tehnică, Bucureşti, 1969.

9. COSTINESCU, O., AMIHĂESEI, C., BÎRSAN, T., Topologie generală - Probleme - Ed.didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1974.

10. CRAIOVEANU, M., BATIU, T.S. - Elemente de analiză locală I, Monografii matematice 6, Tipografia Universităţii din Timişoara, 1976.

11. DIEUDONNE, J. - Une généralisation des espaces compacts, J. Math. Pures Appl. 23 (1944), 65-76.

12. DUGUNDJI, J. - Topology, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1966.

28 SCHOENBERG, I.J. - On the Peano curve of Lebesgue, Bull. Amer. Math. Soc. 44 (1938), 519.

29 SCHUBERT, H. - Topologie (Eine Einführung), B.G.Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1964.

30 SEIFERT, H., THRELFALL, W. - Lehrbuch der Topologie, Chelsea Publ. Co., New York, 1945.

31 SINGER, I.M., THORPE, J.A. - Lecture notes on elementary topology and geometry, Scott, Foresman and Company, Glenview, Illinois, 1967.

32 STEEN, L.A., SEEBACH, J.A. Jr. - Counterexamples in topology (2nd Ed.), Springer Verlag, Berlin 1978.

33 STONE, A.H. - Paracompactness and product spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948), 977-982.

34 TELEMAN, C. - Elemente de topologie şi varietăţi diferenţiabile, Ed.didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1964.

35 VAISMAN, I. - Fundamentele matematicii, Ed.didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1968.

36 VEBLEN, O. - Theory of plane curves in nonmetrical analysis situs, Trans. Am. Math. Soc. 6 (1905) 83-98.

37 VRANCEANU, GH., HANGAN, TH., TELEMAN, C. - Geometrie elementară din punct de vedere modern, Ed. tehnică, Bucureşti, 1967.

38 WALL, C.T.C. - A geometric introduction to topology, Addison - Wesley Publ. Co., Reading, Mass., 1972.

39 WHYBURN, G. T. - Directed families of sets and closedness of functions, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 54 (1965), 688-692.

Scanned with OKEN Scanner